ΘΕΜΑ 12

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής και γνησίως μονότονη στο $[2,5]$ τέτοια, ώστε $\lim_{x\to 2}\frac{f(5)x^3-4f(2)x+8}{x^2-4}=3$. Να αποδειχθεί ότι:

i. ***Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2,5]$***

ii. ***Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f***

iii. ***Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα ακριβώς $\xi\in(2,5)$ τέτοιο, ώστε*** $10f(\xi)=4f(3)+6f(4)$

ΛΥΣΗ

i. Θεωρούμε $g(x)=\frac{f(5)x^3-4f(2)x+8}{x^2-4}$,$x\neq\pm 2$, οπότε

$g(x)(x^2-4)=f(5)x^3-4f(2)x+8$ και

$\lim_{x\to 2}g(x)(x^2-4)=\lim_{x\to 2}(f(5)x^3-4f(2)x+8)$ ή $8f(5)-8f(2)+8=0$ ή

$f(5)=f(2)-1$ (1). Από την (1) προκύπτει ότι $f(5)<f(2)$ άρα η f ως γν. μονότονη θα είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα το σύνολο τιμών της θα είναι το

$f(A)=[f(5),f(2)]$. Λόγω της (1) έχουμε:

$$g(x)=\frac{f(5)x^3-4f(2)x+8}{x^2-4}=\frac{(f(2)-1)x^3-4f(2)x+8}{(x-2)(x+2)}=$$

$$\frac{f(2)x^3-x^3-4f(2)x+8}{(x-2)(x+2)}=\frac{xf(2)(x^2-4)-(x^3-8)}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=\frac{xf(2)(x+2)(x-2)-(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\frac{xf(x)(x+2)-(x^2+2x+4)}{x+2}$$

οπότε

$$\lim_{x\to 2}\frac{xf(x)(x+2)-(x^2+2x+4)}{x+2}=\frac{2f(2)(x+2)-(4+4+4)}{2+2}=3\Leftrightarrow$$

$8f(2)=24\Leftrightarrow f(2)=3$

και από την (1) προκύπτει $f(5)=3-1=2$. Άρα το $f(A)=[2,3]$

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=10f(x)-4f(3)-6f(4)$. Η h είναι συνεχής στο $[2,5]$ διότι και η f συνεχής. Είναι ακόμη:

$h(2)=10f(2)-4f(3)-6f(4)=4(f(2)-f(3))+6(f(2)-f(4))>0$ διότι η f γνησίως φθίνουσα, οπότε $f(2)>f(3)$ και $f(2)>f(4)$

$h(5)=10f(5)-4f(3)-6f(4)=4(f(5)-f(3))+6(f(5)-f(4))<0$

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(2,5)$ τέτοιο, ώστε $10f(\xi)=4f(3)+6f(4)$. Το ξ είναι μοναδικό διότι η h είναι γνησίως φθίνουσα (γν. μονότονη) από τον ορισμό της.