

Το pushout και η ένωση συνόλων

Από τη Θεωρία Συνόλων στη Θεωρία Κατηγοριών

Σημειώσεις που συνοδεύουν το βιβλίο «Εισαγωγή στη Θεωρία Κατηγοριών» των εκδόσεων ΔΙΑΥΛΟΣ.

Σεπτέμβριος 2026

Στις σημειώσεις μας «Το pullback και η τομή συνόλων» είδαμε ότι η τομή δύο συνόλων είναι ειδική περίπτωση μιας γενικότερης έννοιας, του pullback. Εδώ αντιστρέφουμε τα βέλη. Η έννοια που προκύπτει είναι το pushout,¹ και η αντίστοιχη ειδική περίπτωση είναι η ένωση. Στο pullback ζητούσαμε τα ζεύγη που συμφωνούν. Στο pushout συγκολλάμε δύο σύνολα κατά μήκος ενός κοινού κομματιού. Θα δούμε ότι η ένωση, η ξένη ένωση, ο συν-πυρήνας μιας γραμμικής απεικόνισης και η «συγκόλληση» τοπολογικών χώρων είναι όλα pushouts.

Τι προϋποθέτουμε. Από τη Θεωρία Συνόλων χρειαζόμαστε τις έννοιες της σχέσης ισοδυναμίας, των κλάσεων ισοδυναμίας και του συνόλου πηλίκου. Από τη Θεωρία Κατηγοριών χρειαζόμαστε την ξένη ένωση και το συν-γινόμενο, όπως τα παρουσιάζουμε στο βιβλίο μας «Εισαγωγή στη Θεωρία Κατηγοριών», στο κεφάλαιο 8, και το pullback, όπως το παρουσιάσαμε στις αντίστοιχες σημειώσεις μας. Στο βιβλίο το pushout το βρίσκουμε στις ενότητες 9.7 και 11.4. Για την ενότητα 6 χρειαζόμαστε από τη Γραμμική Άλγεβρα τον χώρο πηλίκου W/U ενός διανυσματικού χώρου ως προς έναν υπόχωρο. Η ενότητα 7 προϋποθέτει λίγη τοπολογία, και η παράλειψή της δεν επηρεάζει τα υπόλοιπα. Σε κάθε σημείο του κειμένου όπου χρησιμοποιούμε μια κατηγορική έννοια παραπέμπουμε στην αντίστοιχη ενότητα του βιβλίου.

1 Δύο σύνολα με κοινό κομμάτι

Ας πάρουμε $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{2, 3, 4\}$. Η ξένη ένωση

$$A \sqcup B = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}) = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$$

έχει έξι στοιχεία, γιατί κρατά τα A και B χωριστά, και ο δεύτερος συντελεστής κάθε ζεύγους θυμάται από πού ήρθε το στοιχείο.² Η ένωση $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ έχει τέσσερα. Για να περάσουμε από την ξένη ένωση στην ένωση, πρέπει να ταυτίσουμε το $(2, 0)$ με το $(2, 1)$ και το $(3, 0)$ με το $(3, 1)$, δηλαδή τα δύο αντίγραφα κάθε κοινού στοιχείου. Συγκολλάμε λοιπόν το A και το B κατά μήκος του κοινού τους κομματιού $A \cap B$.

Η συγκόλληση αυτή φαίνεται και στις συναρτήσεις. Για να ορίσουμε μια συνάρτηση στο $A \cup B$ αρκεί να δώσουμε μια συνάρτηση στο A και μια στο B , με την προϋπόθεση ότι οι δύο συμφωνούν στο $A \cap B$. Αυτό το κάνουμε συχνά όταν ορίζουμε μια συνάρτηση «κατά κλάδους». Η συμφωνία στο κοινό κομμάτι είναι ακριβώς η συνθήκη που θα δούμε στον ορισμό του pushout.

2 Ο ορισμός του pushout

Το pullback αφορά δύο βέλη με κοινό στόχο. Το pushout αφορά δύο βέλη με κοινή πηγή,

$$f : C \rightarrow A, \quad g : C \rightarrow B,$$

¹Σε ορισμένες ελληνόγλωσσες πηγές ο όρος αποδίδεται ως εξώθηση. Στο βιβλίο μας, όπως και εδώ, χρησιμοποιούμε αποκλειστικά τον αγγλικό όρο.

²Βλ. ενότητα 8.5 του βιβλίου μας.

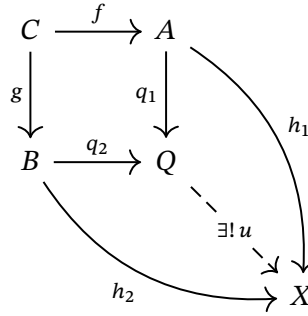
και ο ορισμός του προκύπτει από τον ορισμό του pullback αν αντιστρέψουμε όλα τα βέλη.

Ορισμός 2.1 (Pushout). Έστω $\mathcal{C}$ κατηγορία και $f : C \rightarrow A$, $g : C \rightarrow B$ μορφισμοί της.³ Το **pushout** των f και g είναι ένα αντικείμενο Q μαζί με μορφισμούς $q_1 : A \rightarrow Q$ και $q_2 : B \rightarrow Q$ που ικανοποιούν τις ακόλουθες δύο συνθήκες.

(i) $q_1 \circ f = q_2 \circ g$.

(ii) Για κάθε αντικείμενο X και κάθε ζεύγος μορφισμών $h_1 : A \rightarrow X$, $h_2 : B \rightarrow X$ με $h_1 \circ f = h_2 \circ g$ υπάρχει μοναδικός μορφισμός $u : Q \rightarrow X$ ώστε $u \circ q_1 = h_1$ και $u \circ q_2 = h_2$.

Η συνθήκη (ii) φαίνεται στο διάγραμμα.



Ένα pushout στην $\mathcal{C}$ είναι ακριβώς ένα pullback στην αντίθετη κατηγορία $\mathcal{C}^{\text{op}}$, όπου όλα τα βέλη έχουν αντιστροφή φορά.⁴ Γι' αυτό κάθε ιδιότητα του pullback που προκύπτει από την καθολική ιδιότητα έχει τη δυϊκή της για το pushout. Ειδικότερα το pushout είναι μοναδικό ως προς ισομορφισμό που σέβεται τους μορφισμούς q_1 και q_2 , και γράφουμε $A \sqcup_C B$ για το αντικείμενο Q .

3 Το pushout στα σύνολα

Στην κατηγορία **Set** το pushout κατασκευάζεται όπως στο παράδειγμα της ενότητας 1. Ξεκινάμε από την ξένη ένωση $A \sqcup B$, με τους εγκλεισμούς $i_1(a) = (a, 0)$ και $i_2(b) = (b, 1)$, και ταυτίζουμε το $i_1(f(c))$ με το $i_2(g(c))$ για κάθε $c \in C$.

Οι ταυτίσεις αυτές δεν αποτελούν από μόνες τους σχέση ισοδυναμίας. Αν για παράδειγμα $f(c) = f(c')$, τότε το $i_2(g(c))$ ταυτίζεται με το $i_1(f(c))$ και αυτό με το $i_2(g(c'))$, άρα πρέπει να ταυτιστούν και τα $i_2(g(c))$, $i_2(g(c'))$. Γι' αυτό χρησιμοποιούμε την ελάχιστη σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο $A \sqcup B$ που περιέχει όλα τα ζεύγη $(i_1(f(c)), i_2(g(c)))$, $c \in C$. Αυτή υπάρχει, γιατί η τομή οποιασδήποτε οικογένειας σχέσεων ισοδυναμίας είναι σχέση ισοδυναμίας. Είναι λοιπόν η τομή όλων των σχέσεων ισοδυναμίας που περιέχουν τα ζεύγη αυτά.

Θέτουμε $Q = (A \sqcup B) / \sim$ και συμβολίζουμε με $[z]$ την κλάση του $z \in A \sqcup B$. Ορίζουμε $q_1(a) = [i_1(a)]$ και $q_2(b) = [i_2(b)]$.

Πρόταση 3.1. Η τριάδα (Q, q_1, q_2) είναι pushout των f και g στην **Set**.⁵

Απόδειξη. Για τη συνθήκη (i), για κάθε $c \in C$ ισχύει $i_1(f(c)) \sim i_2(g(c))$, άρα $q_1(f(c)) = q_2(g(c))$.

Για τη (ii) έστω σύνολο X και συναρτήσεις $h_1 : A \rightarrow X$, $h_2 : B \rightarrow X$ με $h_1 \circ f = h_2 \circ g$. Από την καθολική ιδιότητα του συν-γινομένου υπάρχει η συνάρτηση $h : A \sqcup B \rightarrow X$ με $h(a, 0) = h_1(a)$ και

³Βλ. ενότητες 9.7 και 11.4 του βιβλίου μας. Στην ενότητα 11.4 οι μορφισμοί q_1 και q_2 συμβολίζονται ι_A και ι_B .

⁴Για την αντίθετη κατηγορία βλ. ενότητα 3.7 και για τη δυϊκότητα ενότητα 8.6 του βιβλίου μας.

⁵Βλ. ενότητα 11.6 του βιβλίου μας.

$h(b, 1) = h_2(b)$. Η σχέση « $h(z) = h(w)$ » είναι σχέση ισοδυναμίας στο $A \sqcup B$ και περιέχει όλα τα ζεύγη $(i_1(f(c)), i_2(g(c)))$, αφού $h(i_1(f(c))) = h_1(f(c)) = h_2(g(c)) = h(i_2(g(c)))$. Επειδή η $\sim$ είναι η ελάχιστη τέτοια σχέση, από $z \sim w$ έπεται $h(z) = h(w)$. Άρα η συνάρτηση $u : Q \rightarrow X$ με $u([z]) = h(z)$ ορίζεται καλά, δηλαδή δεν εξαρτάται από τον αντιπρόσωπο z της κλάσης. Ισχύει $u(q_1(a)) = h(a, 0) = h_1(a)$ και $u(q_2(b)) = h(b, 1) = h_2(b)$, δηλαδή $u \circ q_1 = h_1$ και $u \circ q_2 = h_2$.

Για τη μοναδικότητα, κάθε στοιχείο του Q έχει τη μορφή $q_1(a)$ ή $q_2(b)$. Αν λοιπόν η $u' : Q \rightarrow X$ ικανοποιεί $u' \circ q_1 = h_1$ και $u' \circ q_2 = h_2$, οι τιμές της είναι καθορισμένες σε όλο το Q και $u' = u$. $\square$

4 Η ένωση ως pushout

Έστω A και B δύο σύνολα, $j_A : A \cap B \hookrightarrow A$ και $j_B : A \cap B \hookrightarrow B$ οι εμφυτεύσεις της τομής τους, και $k_A : A \hookrightarrow A \cup B$, $k_B : B \hookrightarrow A \cup B$ οι εμφυτεύσεις τους στην ένωση. Στις σημειώσεις για το pullback είδαμε ότι η τομή είναι το pullback των εμφυτεύσεων των A και B σε ένα σύνολο που τα περιέχει, για παράδειγμα στο $A \cup B$. Τώρα θα δούμε ότι η ένωση είναι το pushout των εμφυτεύσεων της τομής.

Πρόταση 4.1. Η τριάδα $(A \cup B, k_A, k_B)$ είναι pushout των j_A και j_B στην **Set**.

Απόδειξη. Για τη συνθήκη (i), και οι δύο συνθέσεις $k_A \circ j_A$ και $k_B \circ j_B$ είναι η εμφύτευση του $A \cap B$ στο $A \cup B$, άρα είναι ίσες.

Για τη (ii) έστω σύνολο X και συναρτήσεις $h_1 : A \rightarrow X$, $h_2 : B \rightarrow X$ με $h_1 \circ j_A = h_2 \circ j_B$. Η ισότητα αυτή λέει ότι $h_1(x) = h_2(x)$ για κάθε $x \in A \cap B$. Ορίζουμε $u : A \cup B \rightarrow X$ κατά κλάδους,

$$u(x) = \begin{cases} h_1(x), & x \in A, \\ h_2(x), & x \in B. \end{cases}$$

Ένα στοιχείο που ανήκει και στα δύο σύνολα ανήκει στο $A \cap B$, όπου οι δύο κλάδοι δίνουν την ίδια τιμή, άρα η u ορίζεται καλά. Ισχύει $u \circ k_A = h_1$ και $u \circ k_B = h_2$. Για τη μοναδικότητα, κάθε $x \in A \cup B$ ανήκει στο A ή στο B , οπότε οι ισότητες $u' \circ k_A = h_1$ και $u' \circ k_B = h_2$ καθορίζουν την τιμή $u'(x)$, και $u' = u$. $\square$

Η Πρόταση 4.1 παριστάνεται με το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \xrightarrow{j_A} & A \\ \downarrow j_B & & \downarrow k_A \\ B & \xrightarrow{k_B} & A \cup B \end{array}$$

που είναι το ίδιο τετράγωνο με εκείνο της τομής ως pullback. Το ίδιο τετράγωνο είναι λοιπόν ταυτόχρονα pullback και pushout.

Παράδειγμα 4.2. Για $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{2, 3, 4\}$ έχουμε $A \cap B = \{2, 3\}$. Η κατασκευή της ενότητας 3 ταυτίζει στο $A \sqcup B$ το $(2, 0)$ με το $(2, 1)$ και το $(3, 0)$ με το $(3, 1)$. Οι κλάσεις που προκύπτουν είναι

$$\{(1, 0)\}, \quad \{(2, 0), (2, 1)\}, \quad \{(3, 0), (3, 1)\}, \quad \{(4, 1)\},$$

και η αντιστοιχία κάθε κλάσης στον αριθμό που περιέχει δίνει το $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, όπως στην ενότητα 1.

Όπως και με την τομή, δεν ορίζουμε την ένωση ως pushout. Την ορίζουμε με στοιχεία, ως το σύνολο των x με $x \in A$ ή $x \in B$, και την αναγνωρίζουμε ως pushout, γιατί ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα. Η καθολική ιδιότητα είναι ακριβώς ο κανόνας του ορισμού κατά κλάδους. Μια συνάρτηση στην ένωση δίνεται από δύο συναρτήσεις στα κομμάτια, αρκεί να συμφωνούν στην τομή.

5 Ειδικές περιπτώσεις

Στις σημειώσεις για το pullback είδαμε ότι το pullback πάνω από ένα τελικό αντικείμενο είναι το γινόμενο. Δυϊκά, το pushout κάτω από ένα αρχικό αντικείμενο είναι το συν-γινόμενο. Ένα αντικείμενο $\mathbf{0}$ λέγεται *αρχικό* αν για κάθε αντικείμενο X υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\mathbf{0} \rightarrow X$.⁶ Στην **Set** αρχικό αντικείμενο είναι το κενό σύνολο, αφού από το $\emptyset$ προς κάθε σύνολο υπάρχει μία μόνο συνάρτηση, η κενή. Για κάθε αντικείμενο A γράφουμε $0_A : \mathbf{0} \rightarrow A$ για τον μοναδικό μορφισμό.

Πρόταση 5.1. Έστω κατηγορία με αρχικό αντικείμενο $\mathbf{0}$, αντικείμενα A, B και μορφισμοί $q_1 : A \rightarrow Q$, $q_2 : B \rightarrow Q$. Η τριάδα (Q, q_1, q_2) είναι pushout των 0_A και 0_B αν και μόνο αν είναι συν-γινόμενο των A και B .⁷

Απόδειξη. Για κάθε αντικείμενο X και μορφισμούς $h_1 : A \rightarrow X$, $h_2 : B \rightarrow X$ οι $h_1 \circ 0_A$ και $h_2 \circ 0_B$ είναι και οι δύο μορφισμοί $\mathbf{0} \rightarrow X$, άρα είναι ίσοι. Ειδικότερα, με $X = Q$, $h_1 = q_1$ και $h_2 = q_2$, ισχύει πάντοτε η συνθήκη (i) του ορισμού του pushout. Επίσης η υπόθεση $h_1 \circ 0_A = h_2 \circ 0_B$ της συνθήκης (ii) ισχύει για κάθε ζεύγος (h_1, h_2) . Η συνθήκη (ii) λέει λοιπόν ότι για κάθε X και κάθε ζεύγος h_1, h_2 υπάρχει μοναδικός $u : Q \rightarrow X$ με $u \circ q_1 = h_1$ και $u \circ q_2 = h_2$, και αυτή είναι ακριβώς η καθολική ιδιότητα του συν-γινόμενου. $\square$

Στην **Set** βλέπουμε το ίδιο και από την κατασκευή. Με $C = \emptyset$ δεν υπάρχει κανένα ζεύγος προς ταύτιση, η ελάχιστη σχέση ισοδυναμίας είναι η ισότητα, και το Q είναι η ίδια η ξένη ένωση $A \sqcup B$. Το ίδιο συμβαίνει με την ένωση της ενότητας 4 όταν $A \cap B = \emptyset$.

Μια ακόμη απλή περίπτωση είναι το pushout των id_C και $g : C \rightarrow B$. Αυτό είναι το ίδιο το B , με $q_1 = g$ και $q_2 = \text{id}_B$. Πράγματι $g \circ \text{id}_C = \text{id}_B \circ g$, και αν $h_1 \circ \text{id}_C = h_2 \circ g$, δηλαδή $h_1 = h_2 \circ g$, τότε ο $u = h_2$ ικανοποιεί $u \circ g = h_1$ και $u \circ \text{id}_B = h_2$. Είναι και ο μόνος, αφού η δεύτερη ισότητα δίνει $u = h_2$. Συγκολλώντας το C πάνω στο B μέσω της g δεν προσθέτουμε τίποτα καινούργιο.

6 Ο συν-πυρήνας ως pushout

Στις σημειώσεις για το pullback είδαμε ότι ο πυρήνας ενός ομομορφισμού είναι pullback. Το δυϊκό του πυρήνα είναι ο συν-πυρήνας (cokernel). Θα τον δούμε στην κατηγορία $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$ των διανυσματικών χώρων πάνω σε ένα σώμα $\mathbb{F}$, όπου τα βέλη είναι οι γραμμικές απεικονίσεις.

Στη $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$ ο μηδενικός χώρος 0 είναι *μηδενικό αντικείμενο*, δηλαδή αρχικό και τελικό. Από κάθε χώρο προς τον 0 υπάρχει μία μόνο γραμμική απεικόνιση, και από τον 0 προς κάθε χώρο επίσης μία, η μηδενική. Έστω $T : V \rightarrow W$ γραμμική απεικόνιση, $z : V \rightarrow 0$ η μηδενική απεικόνιση και $\text{Im } T$ η εικόνα της T , που είναι υπόχωρος του W . Θεωρούμε τον χώρο πηλίκου $W/\text{Im } T$, τη φυσική προβολή $\pi : W \rightarrow W/\text{Im } T$, $\pi(w) = w + \text{Im } T$, και τη μηδενική απεικόνιση $o : 0 \rightarrow W/\text{Im } T$.

Πρόταση 6.1. Η τριάδα $(W/\text{Im } T, \pi, o)$ είναι pushout των T και z στην $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$.⁸

Απόδειξη. Για τη συνθήκη (i), για κάθε $v \in V$ ισχύει $\pi(T(v)) = T(v) + \text{Im } T = 0$, αφού $T(v) \in \text{Im } T$. Άρα $\pi \circ T$ είναι η μηδενική απεικόνιση, όπως και η $o \circ z$.

Για τη (ii) έστω χώρος X και γραμμικές απεικονίσεις $h_1 : W \rightarrow X$, $h_2 : 0 \rightarrow X$ με $h_1 \circ T = h_2 \circ z$. Η h_2 είναι αναγκαστικά η μηδενική, άρα η ισότητα λέει ότι $h_1(T(v)) = 0$ για κάθε $v \in V$, δηλαδή

⁶Βλ. ενότητα 3.9 του βιβλίου μας.

⁷Για το συν-γινόμενο βλ. ενότητα 8.7 του βιβλίου μας.

⁸Γενικότερα, ο συν-πυρήνας ενός μορφισμού $f : A \rightarrow B$ ορίζεται ως το pushout της f και του μοναδικού μορφισμού $A \rightarrow \mathbf{1}$ προς το τελικό αντικείμενο. Βλ. το λήμμα «cokernel» του nLab, <https://ncatlab.org/nlab/show/cokernel> (πρόσβαση Οκτώβριος 2026).

ότι η h_1 μηδενίζεται στον $\text{Im } T$. Ορίζουμε $u : W / \text{Im } T \rightarrow X$ με $u(w + \text{Im } T) = h_1(w)$. Ο ορισμός δεν εξαρτάται από τον αντιπρόσωπο, γιατί αν $w + \text{Im } T = w' + \text{Im } T$, τότε $w - w' \in \text{Im } T$ και $h_1(w) - h_1(w') = h_1(w - w') = 0$. Η u είναι γραμμική, γιατί είναι γραμμική η h_1 . Ισχύει $u \circ \pi = h_1$, και $u \circ o = h_2$ αφού και οι δύο είναι η μηδενική απεικόνιση από τον 0. Η μοναδικότητα προκύπτει από το ότι η π είναι επί, οπότε η ισότητα $u' \circ \pi = h_1$ καθορίζει την u' . $\square$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ \downarrow z & & \downarrow \pi \\ 0 & \xrightarrow{o} & W / \text{Im } T \end{array}$$

Ο χώρος $W / \text{Im } T$ λέγεται *συν-πυρήνας* της T και συμβολίζεται $\text{coker } T$. Η συμμετρία με τον πυρήνα είναι πλήρης. Όπως στις ομάδες, ο πυρήνας της T είναι το pullback της T και της μοναδικής απεικόνισης $0 \rightarrow W$, και μετρά πόσο απέχει η T από το να είναι ένα προς ένα. Ο συν-πυρήνας είναι το pushout της T και της μοναδικής απεικόνισης $V \rightarrow 0$, και μετρά πόσο απέχει η T από το να είναι επί. Η T είναι επί ακριβώς όταν $\text{coker } T = 0$.

Διασθητική εικόνα

Ο πυρήνας και ο συν-πυρήνας κοιτάζουν την T από τα δύο άκρα της. Ο πυρήνας βρίσκεται στην πηγή V . Είναι τα διανύσματα που η T στέλνει στο 0, δηλαδή η πληροφορία που η T χάνει. Ο συν-πυρήνας βρίσκεται στον στόχο W . Εκεί θεωρούμε ίσα δύο διανύσματα όταν η διαφορά τους ανήκει στην εικόνα της T , οπότε κάθε διάνυσμα που «φτάνει» η T γίνεται μηδέν. Αυτό που απομένει είναι το κομμάτι του W που η T δεν φτάνει.

Ας δούμε ένα παράδειγμα. Η $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $T(x) = (x, 0)$ έχει εικόνα τον οριζόντιο άξονα. Στον $\mathbb{R}^2 / \text{Im } T$ δύο σημεία (x, y) και (x', y') ταυτίζονται ακριβώς όταν $y = y'$, άρα ο συν-πυρήνας κρατά μόνο την τεταγμένη και είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{R}$. Η T είναι ένα προς ένα, οπότε ο πυρήνας της είναι ο $\{0\}$. Δεν είναι όμως επί, και ο συν-πυρήνας μετρά ακριβώς τη διάσταση που της λείπει.

Στις ομάδες η εικόνα ενός ομομορφισμού δεν είναι πάντα κανονική υποομάδα, και ο συν-πυρήνας είναι πιο λεπτός. Είναι το πηλίκo ως προς τη μικρότερη κανονική υποομάδα που περιέχει την εικόνα. Γι' αυτό περιοριστήκαμε στους διανυσματικούς χώρους.

7 Συγκόλληση τοπολογικών χώρων

Η εικόνα της συγκόλλησης (gluing) γίνεται πιο παραστατική στους τοπολογικούς χώρους. Στην κατηγορία **Top** το pushout των συνεχών απεικονίσεων $f : C \rightarrow A$ και $g : C \rightarrow B$ είναι το ίδιο σύνολο πηλίκo $(A \sqcup B) / \sim$ της ενότητας 3, εφοδιασμένο με την τοπολογία πηλίκo.⁹ Στην $A \sqcup B$ ένα υποσύνολο είναι ανοιχτό όταν τα κομμάτια του στους A και B είναι ανοιχτά, και στο πηλίκo ένα υποσύνολο είναι ανοιχτό όταν η αντίστροφη εικόνα του στην $A \sqcup B$ είναι ανοιχτή. Η τοπολογία αυτή εξασφαλίζει ότι οι q_1, q_2 είναι συνεχείς, και ότι η u της Πρότασης 3.1 είναι συνεχής όταν είναι συνεχείς οι h_1 και h_2 .

Δύο παραδείγματα δείχνουν τι κάνει η κατασκευή.

Παράδειγμα 7.1 (Σφηνοειδής ένωση). Αν ο C είναι ένα σημείο και οι f, g το στέλνουν σε ένα σημείο $a_0 \in A$ και σε ένα σημείο $b_0 \in B$, το pushout συγκολλά τους A και B σε ένα μόνο σημείο, ταυτίζοντας το a_0 με το b_0 . Ο χώρος που προκύπτει λέγεται *σφηνοειδής ένωση* και συμβολίζεται $A \vee B$. Για παράδειγμα, δύο κύκλοι συγκολλημένοι σε ένα σημείο δίνουν ένα «οκτώ».

⁹Βλ. ενότητα 9.7 του βιβλίου μας.

Παράδειγμα 7.2 (Δύο δίσκοι δίνουν σφαίρα). Έστω $C = S^1$ ο κύκλος, A και B δύο κλειστοί δίσκοι, και f, g οι εμφυτεύσεις του κύκλου ως συνόρου κάθε δίσκου. Το pushout ταυτίζει κάθε σημείο του συνόρου του πρώτου δίσκου με το αντίστοιχο σημείο του συνόρου του δεύτερου. Κάθε δίσκος γίνεται ένα ημισφαίριο και ο κοινός κύκλος γίνεται ο ισημερινός. Ο χώρος που προκύπτει είναι ομοιομορφικός με τη σφαίρα S^2 , δηλαδή με την επιφάνεια και όχι με τη συμπαγή μπάλα. Την απόδειξη του ομοιομορφισμού δεν τη δίνουμε εδώ, γιατί χρειάζεται εργαλεία της τοπολογίας που ξεπερνούν τις σημειώσεις αυτές.

Σε αυτό το παράδειγμα οι q_1, q_2 είναι εμφυτεύσεις, αλλά αυτό δεν ισχύει γενικά. Αν η f ταυτίζει δύο σημεία του C ενώ η g όχι, τότε η q_2 ταυτίζει τις εικόνες τους στο B .

8 Σύνοψη

- Δύο μορφισμοί $f : C \rightarrow A$ και $g : C \rightarrow B$ με κοινή πηγή έχουν pushout $A \sqcup_C B$, ένα αντικείμενο με δύο μορφισμούς που κάνουν αντιμεταθετικό το τετράγωνο και έχει την καθολική ιδιότητα του Ορισμού 2.1. Το pushout είναι το pullback της αντίθετης κατηγορίας.
- Στην **Set** το pushout είναι το πηλίκο της ξένης ένωσης $A \sqcup B$ ως προς την ελάχιστη σχέση ισοδυναμίας που ταυτίζει το $f(c)$ με το $g(c)$ για κάθε $c \in C$.
- Για δύο σύνολα A, B το pushout των εμφυτεύσεων της τομής είναι η ένωση $A \cup B$. Η καθολική ιδιότητα είναι ο κανόνας του ορισμού μιας συνάρτησης κατά κλάδους.
- Το pushout κάτω από ένα αρχικό αντικείμενο είναι το συν-γινόμενο. Στην **Set** είναι η ξένη ένωση.
- Ο συν-πυρήνας $W / \text{Im } T$ μιας γραμμικής απεικόνισης $T : V \rightarrow W$ είναι το pushout της T και της $V \rightarrow 0$.
- Στην **Top** το pushout είναι η συγκόλληση δύο χώρων, όπως η σφηνοειδής ένωση και η σφαίρα από δύο δίσκους.

Η δυϊκότητα των δύο σημειώσεων συνοψίζεται στον πίνακα.

pullback	pushout
τομή $A \cap B$	ένωση $A \cup B$
γινόμενο (τελικό αντικείμενο)	συν-γινόμενο (αρχικό αντικείμενο)
πυρήνας	συν-πυρήνας