

Το pullback και η τομή συνόλων

Από τη Θεωρία Συνόλων στη Θεωρία Κατηγοριών

Σημειώσεις που συνοδεύουν το βιβλίο «Εισαγωγή στη Θεωρία Κατηγοριών» των εκδόσεων ΔΙΑΥΛΟΣ.

Σεπτέμβριος 2026

Η τομή δύο συνόλων είναι από τις πρώτες κατασκευές που μαθαίνουμε. Ορίζεται με στοιχεία, ως το σύνολο των κοινών τους στοιχείων. Η Θεωρία Κατηγοριών δείχνει ότι πίσω από αυτή την κατασκευή βρίσκεται μια γενικότερη έννοια, το pullback,¹ που δεν χρειάζεται στοιχεία για να οριστεί. Ξεκινάμε από δύο συναρτήσεις με κοινό στόχο, ορίζουμε το pullback και βλέπουμε ότι η τομή, η αντίστροφη εικόνα και το καρτεσιανό γινόμενο είναι ειδικές περιπτώσεις του. Στις ομάδες, ειδική περίπτωση είναι και ο πυρήνας ενός ομομορφισμού.

Τι προϋποθέτουμε. Από τη Θεωρία Συνόλων χρειαζόμαστε τις έννοιες της συνάρτησης, της εμφύτευσης ενός υποσυνόλου και του καρτεσιανού γινομένου. Από τη Θεωρία Κατηγοριών χρειαζόμαστε την έννοια του αντιμεταθετικού διαγράμματος και τις έννοιες της κατηγορίας και του μορφισμού, όπως τις παρουσιάζουμε στο βιβλίο μας «Εισαγωγή στη Θεωρία Κατηγοριών», στην ενότητα 1.5 και στο κεφάλαιο 3, καθώς και τον ορισμό του γινομένου με καθολική ιδιότητα, από το κεφάλαιο 8. Το pullback το ορίζουμε εδώ από την αρχή. Στο βιβλίο το βρίσκουμε στο κεφάλαιο 9, και ως όριο στην ενότητα 10.6. Για τον πυρήνα ενός ομομορφισμού ομάδων παραπέμπουμε στις σημειώσεις μας «Ομομορφισμοί ομάδων και δακτυλίων». Σε κάθε σημείο του κειμένου όπου χρησιμοποιούμε μια κατηγορική έννοια παραπέμπουμε στην αντίστοιχη ενότητα του βιβλίου.

1 Ζεύγη που συμφωνούν

Έστω δύο συναρτήσεις με κοινό στόχο,

$$f : A \rightarrow C, \quad g : B \rightarrow C.$$

Ζητάμε τα ζεύγη $(a, b) \in A \times B$ στα οποία οι f και g «συμφωνούν», δηλαδή τα ζεύγη με $f(a) = g(b)$. Σχηματίζουμε έτσι το σύνολο

$$P = \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\},$$

που είναι υποσύνολο του $A \times B$. Το P έχει δύο προβολές, $p_1(a, b) = a$ και $p_2(a, b) = b$, και από τον ορισμό του ισχύει $f \circ p_1 = g \circ p_2$. Δηλαδή το τετράγωνο

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p_1} & A \\ p_2 \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

είναι αντιμεταθετικό.

Η ισότητα $f \circ p_1 = g \circ p_2$ μόνη της δεν προσδιορίζει το P , αφού την ικανοποιεί και το κενό σύνολο με τις κενές συναρτήσεις. Το P έχει κάτι παραπάνω. Κάθε άλλο σύνολο που έχει δύο συναρτήσεις προς τα A και B με την ίδια ισότητα περνά μέσα από το P , και με μοναδικό τρόπο. Αυτό ακριβώς είναι η καθολική ιδιότητα του pullback.

¹Σε ορισμένες ελληνόγλωσσες πηγές ο όρος αποδίδεται ως *εφελκυσμός*. Στο βιβλίο μας, όπως και εδώ, χρησιμοποιούμε αποκλειστικά τον αγγλικό όρο.

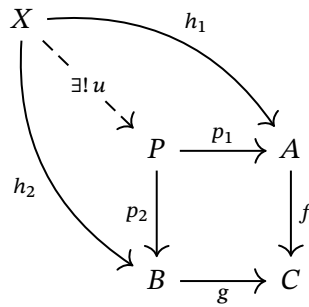
2 Ο ορισμός του pullback

Ο ορισμός δεν αναφέρεται σε στοιχεία, και έτσι έχει νόημα σε κάθε κατηγορία.

Ορισμός 2.1 (Pullback). Έστω $\mathcal{C}$ κατηγορία και $f : A \rightarrow C, g : B \rightarrow C$ μορφισμοί της.² Το **pullback** των f και g είναι ένα αντικείμενο P μαζί με μορφισμούς $p_1 : P \rightarrow A$ και $p_2 : P \rightarrow B$ που ικανοποιούν τις ακόλουθες δύο συνθήκες.

- (i) $f \circ p_1 = g \circ p_2$.
- (ii) Για κάθε αντικείμενο X και κάθε ζεύγος μορφισμών $h_1 : X \rightarrow A, h_2 : X \rightarrow B$ με $f \circ h_1 = g \circ h_2$ υπάρχει μοναδικός μορφισμός $u : X \rightarrow P$ ώστε $p_1 \circ u = h_1$ και $p_2 \circ u = h_2$.

Η συνθήκη (ii) φαίνεται στο διάγραμμα.



Όπως κάθε αντικείμενο που ορίζεται με καθολική ιδιότητα, το pullback είναι μοναδικό ως προς ισομορφισμό που σέβεται τις προβολές.³ Γι' αυτό μιλάμε για το pullback και γράφουμε $A \times_C B$ για το αντικείμενο P , με τις προβολές να θεωρούνται γνωστές από τα συμφραζόμενα.

Το σύνολο P της προηγούμενης ενότητας είναι πράγματι pullback στην κατηγορία **Set**.

Πρόταση 2.2. Έστω $f : A \rightarrow C$ και $g : B \rightarrow C$ συναρτήσεις. Το σύνολο

$$P = \{ (a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b) \}$$

με τις προβολές $p_1(a, b) = a$ και $p_2(a, b) = b$ είναι pullback των f και g στην **Set**.

Απόδειξη. Η συνθήκη (i) ισχύει από τον ορισμό του P . Για τη (ii) έστω σύνολο X και συναρτήσεις $h_1 : X \rightarrow A, h_2 : X \rightarrow B$ με $f \circ h_1 = g \circ h_2$. Για κάθε $x \in X$ ισχύει $f(h_1(x)) = g(h_2(x))$, άρα $(h_1(x), h_2(x)) \in P$. Ορίζουμε $u : X \rightarrow P$ με $u(x) = (h_1(x), h_2(x))$. Τότε $p_1 \circ u = h_1$ και $p_2 \circ u = h_2$. Αν μια άλλη συνάρτηση $u' : X \rightarrow P$ ικανοποιεί και αυτή τις δύο ισότητες, τότε για κάθε x οι δύο συντεταγμένες του $u'(x)$ είναι $h_1(x)$ και $h_2(x)$, άρα $u'(x) = u(x)$ και $u' = u$. $\square$

3 Η τομή ως pullback

Έστω A και B υποσύνολα ενός συνόλου C , με εμφυτεύσεις $\iota_A : A \hookrightarrow C$ και $\iota_B : B \hookrightarrow C$, δηλαδή $\iota_A(a) = a$ και $\iota_B(b) = b$. Ας υπολογίσουμε το σύνολο P της Πρότασης 2.2 για τις ι_A και ι_B . Η συνθήκη $\iota_A(a) = \iota_B(b)$ σημαίνει $a = b$, άρα το P αποτελείται από τα ζεύγη (a, a) με a κοινό στοιχείο των A και B . Τα ζεύγη αυτά αντιστοιχούν ένα προς ένα στα στοιχεία του $A \cap B$. Περιμένουμε λοιπόν ότι η τομή είναι το pullback. Ας το δούμε απευθείας από τον ορισμό, ώστε να παρακολουθήσουμε την καθολική ιδιότητα στην πράξη.

²Βλ. ενότητα 9.4 του βιβλίου μας.

³Βλ. ενότητα 9.5 του βιβλίου μας.

Πρόταση 3.1. Έστω $A, B \subseteq C$ και $j_A : A \cap B \rightarrow A$, $j_B : A \cap B \rightarrow B$ οι εμφυτεύσεις της τομής. Η τριάδα $(A \cap B, j_A, j_B)$ είναι pullback των ι_A και ι_B στην **Set**.⁴

Απόδειξη. Για τη συνθήκη (i), και οι δύο συνθέσεις $\iota_A \circ j_A$ και $\iota_B \circ j_B$ είναι η εμφύτευση του $A \cap B$ στο C , άρα είναι ίσες.

Για τη (ii) έστω σύνολο X και συναρτήσεις $h_1 : X \rightarrow A$, $h_2 : X \rightarrow B$ με $\iota_A \circ h_1 = \iota_B \circ h_2$. Η ισότητα αυτή λέει ότι $h_1(x) = h_2(x)$ για κάθε $x \in X$. Το στοιχείο $h_1(x)$ ανήκει στο A , και αφού ισούται με το $h_2(x)$ ανήκει και στο B . Άρα $h_1(x) \in A \cap B$ και ορίζεται η συνάρτηση $u : X \rightarrow A \cap B$ με $u(x) = h_1(x)$. Έχουμε $j_A \circ u = h_1$, και $j_B \circ u = h_2$ αφού $h_1(x) = h_2(x)$. Για τη μοναδικότητα, αν $u' : X \rightarrow A \cap B$ ικανοποιεί $j_A \circ u' = h_1$, τότε $u'(x) = h_1(x) = u(x)$ για κάθε x , γιατί η j_A είναι εμφύτευση. $\square$

Η Πρόταση 3.1 παριστάνεται με το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \xrightarrow{j_A} & A \\ j_B \downarrow & & \downarrow \iota_A \\ B & \xrightarrow{\iota_B} & C \end{array}$$

στο οποίο όλα τα βέλη είναι εμφυτεύσεις.

Παράδειγμα 3.2. Έστω $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{2, 3, 4\}$. Το σύνολο των ζευγών $(a, b) \in A \times B$ με $\iota_A(a) = \iota_B(b)$ είναι το $P = \{(2, 2), (3, 3)\}$. Η αντιστοιχία $(a, a) \mapsto a$ ταυτίζει με το $A \cap B = \{2, 3\}$, και οι προβολές p_1, p_2 γίνονται οι εμφυτεύσεις j_A, j_B .

Η ίδια κατασκευή δουλεύει και σε άλλες κατηγορίες. Στην κατηγορία των ομάδων, το pullback των εμφυτεύσεων δύο υποομάδων H, K μιας ομάδας G είναι η τομή $H \cap K$, που είναι υποομάδα, με τις εμφυτεύσεις της. Η απόδειξη είναι ίδια με την Πρόταση 3.1, και η u είναι ομομορφισμός, επειδή η u είναι η ίδια απεικόνιση με την h_1 , με στόχο περιορισμένο στο $H \cap K$. Στην κατηγορία των τοπολογικών χώρων, το pullback των εμφυτεύσεων δύο υπόχωρων είναι η τομή τους με την τοπολογία υπόχωρου, και η u είναι συνεχής για τον ίδιο λόγο.

4 Ορισμός και αναγνώριση

Η τομή και το pullback ορίζονται με διαφορετικό τρόπο. Την τομή $A \cap B$ την ορίζουμε με στοιχεία, ως το σύνολο των x με $x \in A$ και $x \in B$. Το pullback το ορίζουμε με καθολική ιδιότητα, δηλαδή μόνο από τον τρόπο που σχετίζεται με τα άλλα αντικείμενα και τους μορφισμούς της κατηγορίας, χωρίς να λέμε τι υπάρχει μέσα του.

Δεν ορίζουμε λοιπόν την τομή ως pullback. Την αναγνωρίζουμε ως pullback, γιατί ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα. Η αναγνώριση αυτή έχει αξία, γιατί η καθολική ιδιότητα έχει νόημα σε κάθε κατηγορία, ακόμη και όταν τα αντικείμενά της δεν έχουν στοιχεία. Έτσι το pullback γενικεύει την τομή.⁵

5 Η αντίστροφη εικόνα ως pullback

Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ και υποσύνολο $S \subseteq B$, με εμφύτευση $i : S \hookrightarrow B$. Η αντίστροφη εικόνα του S είναι το σύνολο

$$f^{-1}(S) = \{a \in A \mid f(a) \in S\}.$$

⁴Βλ. ενότητα 9.6 του βιβλίου μας.

⁵Βλ. T. Leinster, *Basic Category Theory*, Cambridge University Press, 2014, σ. 116.

Έχουμε την εμφύτευση $p: f^{-1}(S) \rightarrow A$ και τη συνάρτηση $q: f^{-1}(S) \rightarrow S$ με $q(a) = f(a)$, που ορίζεται καλά αφού $f(a) \in S$ για κάθε $a \in f^{-1}(S)$. Προφανώς $i \circ q = f \circ p$.

Πρόταση 5.1. Η τριάδα $(f^{-1}(S), p, q)$ είναι pullback των f και i στην **Set**.

Απόδειξη. Η συνθήκη (i) είναι η ισότητα $i \circ q = f \circ p$ που είδαμε. Για τη (ii) έστω σύνολο X και συναρτήσεις $h_1: X \rightarrow A$, $h_2: X \rightarrow S$ με $f \circ h_1 = i \circ h_2$. Για κάθε $x \in X$ έχουμε $f(h_1(x)) = h_2(x) \in S$, άρα $h_1(x) \in f^{-1}(S)$. Ορίζουμε $u: X \rightarrow f^{-1}(S)$ με $u(x) = h_1(x)$. Τότε $p \circ u = h_1$ και $q \circ u = f \circ h_1 = h_2$. Η μοναδικότητα προκύπτει όπως πριν, γιατί η p είναι εμφύτευση και η ισότητα $p \circ u' = h_1$ καθορίζει το u' . $\square$

Το pullback γενικεύει έτσι και την αντίστροφη εικόνα. Η τομή είναι ειδική περίπτωση. Αν πάρουμε $f = \iota_A: A \hookrightarrow C$ και $S = B$, τότε $\iota_A^{-1}(B) = \{a \in A \mid a \in B\} = A \cap B$.

6 Ο πυρήνας ως pullback

Η αντίστροφη εικόνα έχει μια σημαντική εφαρμογή στις ομάδες. Στις σημειώσεις μας «Ομομορφισμοί ομάδων και δακτυλίων» ορίσαμε τον πυρήνα ενός ομομορφισμού ομάδων $f: G \rightarrow H$ ως το σύνολο

$$\ker f = \{x \in G \mid f(x) = e_H\}.$$

Δηλαδή $\ker f = f^{-1}(\{e_H\})$, η αντίστροφη εικόνα της τετριμμένης υποομάδας $\{e_H\}$ της H . Από την Πρόταση 5.1 ο πυρήνας είναι λοιπόν pullback της f και της εμφύτευσης $i: \{e_H\} \hookrightarrow H$ στην **Set**. Το ίδιο ισχύει και στην κατηγορία **Grp** των ομάδων, όπου τα βέλη είναι οι ομομορφισμοί.

Πρόταση 6.1. Έστω $f: G \rightarrow H$ ομομορφισμός ομάδων, $i: \{e_H\} \hookrightarrow H$ η εμφύτευση της τετριμμένης υποομάδας, $k: \ker f \hookrightarrow G$ η εμφύτευση του πυρήνα και $t: \ker f \rightarrow \{e_H\}$ ο τετριμμένος ομομορφισμός. Η τριάδα $(\ker f, k, t)$ είναι pullback των f και i στην **Grp**.⁶

Απόδειξη. Ο $\ker f$ είναι υποομάδα της G , όπως δείξαμε στις σημειώσεις για τους ομομορφισμούς, οπότε οι k και t είναι ομομορφισμοί. Για τη συνθήκη (i), οι $f \circ k$ και $i \circ t$ στέλνουν κάθε $x \in \ker f$ στο e_H , άρα είναι ίσοι.

Για τη (ii) έστω ομάδα X και ομομορφισμοί $h_1: X \rightarrow G$, $h_2: X \rightarrow \{e_H\}$ με $f \circ h_1 = i \circ h_2$. Η $\{e_H\}$ έχει ένα μόνο στοιχείο, άρα $h_2(x) = e_H$ για κάθε $x \in X$, και η ισότητα λέει ότι $f(h_1(x)) = e_H$, δηλαδή $h_1(x) \in \ker f$. Ορίζουμε $u: X \rightarrow \ker f$ με $u(x) = h_1(x)$. Η u είναι ομομορφισμός, γιατί είναι ομομορφισμός η h_1 και ο $\ker f$ έχει την πράξη της G . Έχουμε $k \circ u = h_1$, και $t \circ u = h_2$ αφού και οι δύο στέλνουν κάθε x στο e_H . Η μοναδικότητα προκύπτει όπως πριν, γιατί η k είναι εμφύτευση. $\square$

Το αντίστοιχο τετράγωνο είναι το

$$\begin{array}{ccc} \ker f & \xrightarrow{k} & G \\ \downarrow t & & \downarrow f \\ \{e_H\} & \xrightarrow{i} & H \end{array}$$

Η τετριμμένη ομάδα είναι μηδενικό αντικείμενο της **Grp**, δηλαδή αρχικό και τελικό. Από κάθε ομάδα προς αυτήν υπάρχει ένας μόνο ομομορφισμός, ο τετριμμένος, και από αυτήν προς κάθε ομάδα H υπάρχει επίσης ένας μόνο, αυτός που στέλνει το ουδέτερο στο e_H . Η εμφύτευση i είναι λοιπόν ο μοναδικός

⁶Η πρόταση είναι ειδική περίπτωση του γενικού ορισμού του πυρήνα ως pullback. Σε κατηγορία με αρχικό αντικείμενο 0 , ο πυρήνας ενός μορφισμού $f: A \rightarrow B$ είναι το pullback της f και του μοναδικού μορφισμού $0 \rightarrow B$. Βλ. το λήμμα «kernel» του nLab, ενότητα «As a pullback», <https://ncatlab.org/nlab/show/kernel> (πρόσβαση Οκτώβριος 2026).

ομομορφισμός από την τετριμμένη ομάδα στην H , και ο πυρήνας είναι το pullback της f κατά μήκος αυτού του ομομορφισμού.

Ο πυρήνας, που στις σημειώσεις για τους ομομορφισμούς τον ορίσαμε με στοιχεία, αναγνωρίζεται έτσι μέσω μιας καθολικής ιδιότητας, όπως ακριβώς και η τομή.

7 Το γινόμενο ως pullback

Το καρτεσιανό γινόμενο είναι επίσης pullback, αλλά πάνω από έναν ιδιαίτερο στόχο. Θυμίζουμε ότι ένα αντικείμενο $\mathbf{1}$ λέγεται τελικό αν για κάθε αντικείμενο X υπάρχει μοναδικός μορφισμός $X \rightarrow \mathbf{1}$.⁷ Στην **Set** τελικό αντικείμενο είναι κάθε μονοσύνολο $\mathbf{1} = \{*\}$, αφού από κάθε σύνολο υπάρχει μία μόνο συνάρτηση προς αυτό, η σταθερή. Για κάθε αντικείμενο A γράφουμε $!_A : A \rightarrow \mathbf{1}$ για τον μοναδικό μορφισμό.

Πρόταση 7.1. Έστω κατηγορία με τελικό αντικείμενο $\mathbf{1}$, αντικείμενα A, B και μορφισμούς $p_1 : P \rightarrow A$, $p_2 : P \rightarrow B$. Η τριάδα (P, p_1, p_2) είναι pullback των $!_A$ και $!_B$ αν και μόνο αν είναι γινόμενο των A και B .⁸

Απόδειξη. Για κάθε αντικείμενο X και μορφισμούς $h_1 : X \rightarrow A$, $h_2 : X \rightarrow B$ οι $!_A \circ h_1$ και $!_B \circ h_2$ είναι και οι δύο μορφισμοί $X \rightarrow \mathbf{1}$, άρα είναι ίσοι, αφού υπάρχει μόνο ένας τέτοιος μορφισμός. Ειδικότερα, με $X = P$, $h_1 = p_1$ και $h_2 = p_2$, ισχύει πάντοτε η συνθήκη (i) του ορισμού του pullback. Επίσης η υπόθεση $!_A \circ h_1 = !_B \circ h_2$ της συνθήκης (ii) ισχύει για κάθε ζεύγος (h_1, h_2) . Η συνθήκη (ii) λέει λοιπόν ότι για κάθε X και κάθε ζεύγος h_1, h_2 υπάρχει μοναδικός $u : X \rightarrow P$ με $p_1 \circ u = h_1$ και $p_2 \circ u = h_2$, και αυτή είναι ακριβώς η καθολική ιδιότητα του γινομένου. $\square$

Στην **Set** βλέπουμε το ίδιο με στοιχεία. Αφού $!_A(a) = * = !_B(b)$ για κάθε $a \in A$ και $b \in B$, η συνθήκη στο σύνολο P της Πρότασης 2.2 ισχύει για κάθε ζεύγος, και έτσι $P = A \times B$.

Παρατήρηση 7.2. Το γινόμενο δεν είναι pullback των ταυτοτικών μορφισμών. Οι id_A και id_B έχουν στόχους A και B , που γενικά διαφέρουν, οπότε δεν σχηματίζεται pullback. Και αν πάρουμε $B = A$, το pullback των id_A και id_A στην **Set** είναι το σύνολο των ζευγών (a, a') με $a = a'$, δηλαδή το A και όχι το $A \times A$.

8 Σύνοψη

- Δύο μορφισμοί $f : A \rightarrow C$ και $g : B \rightarrow C$ με κοινό στόχο έχουν pullback $A \times_C B$, ένα αντικείμενο με δύο προβολές που κάνουν αντιμεταθετικό το τετράγωνο και έχει την καθολική ιδιότητα του Ορισμού 2.1.
- Στην **Set** το pullback είναι το σύνολο των ζευγών $(a, b) \in A \times B$ με $f(a) = g(b)$.
- Για δύο υποσύνολα A, B ενός C το pullback των εμφυτεύσεων είναι η τομή $A \cap B$. Την τομή δεν την ορίζουμε ως pullback, την αναγνωρίζουμε ως τέτοιο, γιατί ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα.
- Το pullback μιας συνάρτησης $f : A \rightarrow B$ και της εμφύτευσης ενός υποσυνόλου $S \subseteq B$ είναι η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(S)$.
- Ο πυρήνας ενός ομομορφισμού ομάδων $f : G \rightarrow H$ είναι το pullback της f και της εμφύτευσης $\{e_H\} \hookrightarrow H$, στην **Set** και στην **Grp**.

⁷Βλ. ενότητα 3.9 του βιβλίου μας.

⁸Για το γινόμενο βλ. ενότητα 8.4 του βιβλίου μας.

- Το pullback των μοναδικών μορφισμών $A \rightarrow \mathbf{1}$ και $B \rightarrow \mathbf{1}$ προς ένα τελικό αντικείμενο είναι το γινόμενο $A \times B$.