

Η προσάρτηση

Από την ελεύθερη ομάδα στους συζυγείς συναρτητές

Σημειώσεις που συνοδεύουν το βιβλίο «Εισαγωγή στη Θεωρία Κατηγοριών» των εκδόσεων ΔΙΑΥΛΟΣ.

Σεπτέμβριος 2026

Η προσάρτηση εμφανίζεται σε κάθε κατασκευή του τύπου «η ελεύθερη δομή πάνω σε κάτι», και πολλές φορές βρίσκονται μπροστά μας χωρίς να τη δούμε. Ξεκινάμε από ένα γνωστό γεγονός για την ελεύθερη ομάδα, το διατυπώνουμε ως αντιστοιχία ανάμεσα σε σύνολα μορφισμών και βλέπουμε ότι η ίδια αντιστοιχία επαναλαμβάνεται σε πολλά άλλα μέρη. Έτσι φτάνουμε στον ορισμό, στη μονάδα και στη συν-μονάδα, και τέλος στο γιατί μια προσάρτηση φέρνει αυτόματα πληροφορία για τα γινόμενα και τα συν-γινόμενα.

Τι προϋποθέτουμε. Χρειαζόμαστε τις έννοιες της κατηγορίας, του συναρτητή και του φυσικού μετασχηματισμού, όπως τις παρουσιάζουμε στο βιβλίο μας «Εισαγωγή στη Θεωρία Κατηγοριών» στα κεφάλαια 3, 5 και 6, και ιδιαίτερα τον επιλήσιμονα συναρτητή (ενότητα 5.3). Στο τέλος χρησιμοποιούμε και τα γινόμενα του κεφαλαίου 8. Την προσάρτηση τη θεμελιώνουμε εδώ από την αρχή. Στο βιβλίο τη βρίσκουμε στο κεφάλαιο 13. Σε κάθε σημείο όπου χρησιμοποιούμε μια κατηγορική έννοια παραπέμπουμε στην αντίστοιχη ενότητα του βιβλίου.

1 Η ελεύθερη ομάδα και οι εικόνες των γεννητόρων

Έστω S ένα σύνολο. Η ελεύθερη ομάδα $F(S)$ πάνω στο S είναι η ομάδα που προκύπτει αν πάρουμε τα στοιχεία του S ως σύμβολα και επιτρέψουμε όλες τις λέξεις από αυτά και τους αντιστρόφους τους, χωρίς καμία σχέση πέρα από τις αναγκαιές, δηλαδή ότι το xx^{-1} και το $x^{-1}x$ απλοποιούνται.¹ Αν, για παράδειγμα, $S = \{a, b\}$, τα στοιχεία της $F(S)$ είναι οι ανηγμένες λέξεις στα a, a^{-1}, b, b^{-1} , όπως οι $ab, a^{-1}ba$ και η κενή λέξη που είναι το ουδέτερο στοιχείο.

Το βασικό χαρακτηριστικό της $F(S)$ είναι το εξής. Έστω G μια οποιαδήποτε ομάδα και $\varphi : S \rightarrow U(G)$ μια οποιαδήποτε συνάρτηση από το S στο υποκείμενο σύνολο $U(G)$ της G . Τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\bar{\varphi} : F(S) \rightarrow G$ που στέλνει κάθε γεννήτορα $s \in S$ στο $\varphi(s)$. Δεν έχουμε καμία επιλογή πέρα από το πού θα πάνε οι γεννήτορες, και αυτή η επιλογή μπορεί να γίνει ελεύθερα, αφού δεν υπάρχουν σχέσεις που να τη δεσμεύουν. Όταν έχουμε επιλέξει τις εικόνες των γεννητόρων, ο ομομορφισμός $\bar{\varphi}$ προκύπτει μονοσήμαντα, γιατί μια λέξη στέλνεται στο γινόμενο των εικόνων των γραμμάτων της.

Αν γράψουμε $\iota : S \rightarrow U(F(S))$ για την εμφύτευση των γεννητόρων, αυτό είναι ακριβώς η καθολική ιδιότητα που φαίνεται στο διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\iota} & U(F(S)) \\ & \searrow \varphi & \downarrow U(\bar{\varphi}) \\ & & U(G) \end{array}$$

Η αντιστοιχία $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$ είναι τώρα μια αμφίρριψη ανάμεσα σε δύο σύνολα μορφισμών που ζουν σε διαφορετικές κατηγορίες,

$$\mathbf{Grp}(F(S), G) \cong \mathbf{Set}(S, U(G)).$$

¹Βλ. ενότητα 13.1 του βιβλίου μας.

Αριστερά έχουμε ομομορφισμούς ομάδων και δεξιά απλές συναρτήσεις συνόλων. Η αντιστοιχία αυτή είναι η πρώτη εμφάνιση μιας προσάρτησης.

Διαισθητική εικόνα

Το να ορίσουμε έναν ομομορφισμό από την ελεύθερη ομάδα σε μια ομάδα G είναι το ίδιο πράγμα με το να διαλέξουμε ένα στοιχείο της G για κάθε γεννήτορα. Το πρώτο είναι πρόβλημα στον «πλούσιο» κόσμο των ομάδων. Το δεύτερο είναι πρόβλημα στον «φτωχό» κόσμο των συνόλων, και είναι πολύ πιο εύκολο.

Προσοχή

Οι συναρτητές $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Grp}$ και $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ δεν είναι αντίστροφοι ο ένας του άλλου. Αν ξεκινήσουμε από ένα σύνολο S , φτιάχνουμε την $F(S)$ και μετά ξεχάσουμε την πράξη, παίρνουμε το $U(F(S))$, που είναι πολύ μεγαλύτερο από το S . Αν ξεκινήσουμε από μια ομάδα G , ξεχάσουμε την πράξη και φτιάχνουμε την ελεύθερη ομάδα $F(U(G))$, αυτή γενικά δεν είναι ισόμορφη με την G . Η προσάρτηση δεν λέει ότι οι F και U αναιρούν ο ένας τον άλλον. Λέει ότι τα προβλήματα μορφισμών στους δύο κόσμους αντιστοιχούν το ένα στο άλλο.

2 Ο ορισμός της προσάρτησης

Ας ξαναδούμε το ζεύγος (F, U) γενικότερα. Έχουμε δύο κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ και δύο συναρτητές σε αντίθετες κατευθύνσεις,

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, \quad U : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}.$$

Ορισμός 2.1 (Προσάρτηση). Μια **προσάρτηση** (adjunction) $F \dashv U$ είναι μια φυσική αμφίρριψη

$$\mathcal{D}(F(C), D) \cong \mathcal{C}(C, U(D)),$$

φυσική ως προς $C \in \mathcal{C}$ και $D \in \mathcal{D}$. Ο F λέγεται **αριστερός συζυγής** (left adjoint) του U και ο U **δεξιός συζυγής** (right adjoint) του F .²

Ο συμβολισμός $F \dashv U$ διαβάζεται «ο F είναι αριστερά και ο U δεξιά». Ο όρος «προσάρτηση» περιγράφει τη σχέση, ενώ οι όροι «αριστερός» και «δεξιός συζυγής» περιγράφουν τους ρόλους των δύο συναρτητών μέσα σε αυτήν. Ο αριστερός συζυγής είναι αυτός που εμφανίζεται στο πρώτο όρισμα του Hom-συνόλου $\mathcal{D}(F(C), D)$.

Τι σημαίνει όμως «φυσική»; Ονομάζουμε $\Phi_{C,D}$ την αντιστοιχία

$$\Phi_{C,D} : \mathcal{D}(F(C), D) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}(C, U(D)).$$

Η φυσικότητα ως προς C και D σημαίνει ότι για κάθε $f : C' \rightarrow C$ στην $\mathcal{C}$, κάθε $g : D \rightarrow D'$ στην $\mathcal{D}$ και κάθε $h : F(C) \rightarrow D$ ισχύει

$$\Phi_{C',D'}(g \circ h \circ F(f)) = U(g) \circ \Phi_{C,D}(h) \circ f.$$

Με άλλα λόγια, αν αλλάξουμε το C προς τα πίσω με ένα βέλος f ή το D προς τα μπρος με ένα βέλος g , η αντιστοιχία συμπεριφέρεται σωστά. Στα Hom-σύνολα αυτό εκφράζεται με τον ισομορφισμό συναρτητών $\mathcal{D}(F(-), -) \cong \mathcal{C}(-, U(-))$ από την $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D}$ στην $\mathbf{Set}$.

Το παράδειγμα της προηγούμενης ενότητας γράφεται λοιπόν $F \dashv U$ για το ζεύγος ελεύθερης ομάδας και επιλήσμονος. Η F είναι αριστερός συζυγής και ο U δεξιός συζυγής.

²Βλ. ενότητα 13.3 του βιβλίου μας. Οι συζυγείς συναρτητές εισήχθησαν από τον Daniel M. Kan το 1958 στο άρθρο *Adjoint Functors*, *Transactions of the American Mathematical Society*, 87(2):294–329.

3 Μονάδα και συν-μονάδα

Η αντιστοιχία Φ περιέχει δύο ξεχωριστά μορφισμούς που τους χρησιμοποιούμε συνέχεια. Τους βρίσκουμε αν αφήσουμε το D ή το C να πάρει την πιο φυσική τιμή.

Για $D = F(C)$ έχουμε αντιστοιχία $\mathcal{D}(F(C), F(C)) \cong \mathcal{C}(C, UF(C))$. Στην ταυτότητα $\text{id}_{F(C)}$ αντιστοιχεί ένας μορφισμός

$$\eta_C = \Phi_{C, F(C)}(\text{id}_{F(C)}) : C \rightarrow UF(C).$$

Αυτοί οι μορφισμοί συνθέτουν έναν φυσικό μετασχηματισμό $\eta : \text{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow U \circ F$, τη **μονάδα** (unit) της προσάρτησης.³

Συμμετρικά, για $C = U(D)$ έχουμε $\mathcal{D}(FU(D), D) \cong \mathcal{C}(U(D), U(D))$, και στην ταυτότητα $\text{id}_{U(D)}$ αντιστοιχεί ένας μορφισμός

$$\varepsilon_D = \Phi_{U(D), D}^{-1}(\text{id}_{U(D)}) : FU(D) \rightarrow D.$$

Αυτοί συνθέτουν τη **συν-μονάδα** (counit) $\varepsilon : F \circ U \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$.⁴

Στο παράδειγμα της ελεύθερης ομάδας οι δύο μετασχηματισμοί έχουν σαφή περιγραφή.

Παράδειγμα 3.1 (Η ελεύθερη ομάδα). Η μονάδα $\eta_S : S \rightarrow UF(S)$ στέλνει κάθε $s \in S$ στη λέξη με ένα μόνο γράμμα, το s . Είναι η εμφύτευση ι των γεννητόρων που είδαμε πιο πάνω. Η συν-μονάδα $\varepsilon_G : FU(G) \rightarrow G$ δουλεύει ως εξής. Τα γράμματα της ελεύθερης ομάδας $FU(G)$ είναι τα στοιχεία της G , και η ε_G στέλνει κάθε λέξη $g_1^{\pm 1} \dots g_n^{\pm 1}$ στο γινόμενο της, υπολογισμένο μέσα στην G . Είναι η «εκτέλεση» των πράξεων που στην $FU(G)$ έχουμε αφήσει απλώς γραμμένες.

Η μονάδα έχει επιπλέον μια καθολική ιδιότητα, και είναι αυτή που πραγματικά περιγράφει την F .

Πρόταση 3.2. Έστω $F \dashv U$ με μονάδα η . Για κάθε $C \in \mathcal{C}$, κάθε $D \in \mathcal{D}$ και κάθε μορφισμό $f : C \rightarrow U(D)$ υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\bar{f} : F(C) \rightarrow D$ με $U(\bar{f}) \circ \eta_C = f$.

Απόδειξη. Ο $\bar{f}$ είναι ο $\Phi_{C, D}^{-1}(f)$. Από τη φυσικότητα της Φ , εφαρμοσμένη στον $\bar{f}$ και στην ταυτότητα του $F(C)$, παίρνουμε $\Phi_{C, D}(\bar{f}) = U(\bar{f}) \circ \Phi_{C, F(C)}(\text{id}_{F(C)}) = U(\bar{f}) \circ \eta_C$. Επειδή η $\Phi_{C, D}$ είναι αμφίρριψη, ο $\bar{f}$ είναι ο μοναδικός μορφισμός με αυτή την ιδιότητα. $\square$

Το διάγραμμα της πρότασης είναι το ίδιο με αυτό της ελεύθερης ομάδας.

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\eta_C} & UF(C) \\ & \searrow f & \downarrow U(\bar{f}) \\ & & U(D) \end{array}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι το $F(C)$, μαζί με τη μονάδα η_C , παίζει τον ρόλο που παίζει η ελεύθερη ομάδα για ένα σύνολο. Είναι το «ελεύθερο» αντικείμενο πάνω στο C ως προς τον U . Ο ίδιος ισχυρισμός μπορεί να διατυπωθεί και με τους αναπαραστάσιμους συναρτητές του κεφαλαίου 12. Για σταθερό C ο συναρτητής $\mathcal{C}(C, U(-))$ είναι αναπαραστάσιμος, με αντικείμενο αναπαράστασης το $F(C)$ και καθολικό στοιχείο το η_C .⁵ Ισχύει και το αντίστροφο. Αν για κάθε C ο $\mathcal{C}(C, U(-))$ είναι αναπαραστάσιμος, τότε η αντιστοίχιση $C \mapsto F(C)$ επεκτείνεται σε συναρτητή που είναι αριστερός συζυγής του U .

Ως συνέπεια, ο αριστερός συζυγής ενός συναρτητή, όταν υπάρχει, είναι μοναδικός ως προς φυσικό ισομορφισμό, γιατί ένα αντικείμενο που αναπαριστά έναν συναρτητή είναι μοναδικό ως προς ισομορφισμό. Γι' αυτό μιλάμε για τον αριστερό συζυγή του U .

³Βλ. ενότητα 13.4 του βιβλίου μας. Στο κεφάλαιο 14 ο ίδιος μετασχηματισμός λέγεται και μοναδιαίος μετασχηματισμός, για να μη συγχέεται με τη μονάδα (monad) που ορίζουμε εκεί.

⁴Βλ. ενότητα 13.5 του βιβλίου μας.

⁵Βλ. ενότητες 12.3 και 13.7 του βιβλίου μας.

4 Οι ταυτότητες τριγώνου

Η μονάδα και η συν-μονάδα δεν είναι ανεξάρτητες. Συνδέονται με δύο εξισώσεις.

Διαισθητική εικόνα

Όταν πηγαίνουμε από τον έναν κόσμο στον άλλον και επιστρέφουμε, οι δύο φυσικές διαδρομές που διαθέτουμε, η μονάδα και η συν-μονάδα, δεν αλλάζουν το αντικείμενο. Ξεκινάμε από ένα $U(D)$, πηγαίνουμε με τη μονάδα στο $UFU(D)$ και επιστρέφουμε με τη συν-μονάδα, και καταλήγουμε στο ίδιο $U(D)$ χωρίς καμία αλλαγή. Το ίδιο ισχύει αν ξεκινήσουμε από ένα $F(C)$. Οι ταυτότητες δεν λένε ότι η διαδρομή από το C στο $UF(C)$ μας φέρνει πίσω στο C , γιατί αυτό γενικά δεν ισχύει.

Πρόταση 4.1 (Ταυτότητες τριγώνου). Αν $F \dashv U$ με μονάδα η και συν-μονάδα ε , τότε

$$U\varepsilon \circ \eta U = \text{id}_U \quad \text{και} \quad \varepsilon F \circ F\eta = \text{id}_F.$$

Στις συνιστώσες, οι ισότητες λένε ότι οι συνθέσεις

$$U(D) \xrightarrow{\eta_{U(D)}} UFU(D) \xrightarrow{U(\varepsilon_D)} U(D) \quad \text{και} \quad F(C) \xrightarrow{F(\eta_C)} FUF(C) \xrightarrow{\varepsilon_{F(C)}} F(C)$$

είναι ταυτοτικές.

Απόδειξη. Για την πρώτη σύνθεση εφαρμόζουμε τη φυσικότητα της Φ ως προς το δεύτερο όρισμα στον $\varepsilon_D : FU(D) \rightarrow D$, και χρησιμοποιούμε ότι $\Phi_{U(D),FU(D)}(\text{id}) = \eta_{U(D)}$ και $\Phi_{U(D),D}(\varepsilon_D) = \text{id}_{U(D)}$ από τους ορισμούς. Παίρνουμε

$$\text{id}_{U(D)} = \Phi_{U(D),D}(\varepsilon_D \circ \text{id}_{FU(D)}) = U(\varepsilon_D) \circ \eta_{U(D)}.$$

Για τη δεύτερη εφαρμόζουμε τη φυσικότητα ως προς το πρώτο όρισμα στον $\eta_C : C \rightarrow UF(C)$. Παίρνουμε

$$\Phi_{C,F(C)}(\varepsilon_{F(C)} \circ F(\eta_C)) = \Phi_{UF(C),F(C)}(\varepsilon_{F(C)}) \circ \eta_C = \text{id}_{UF(C)} \circ \eta_C = \eta_C.$$

Όμως και $\Phi_{C,F(C)}(\text{id}_{F(C)}) = \eta_C$. Επειδή η $\Phi_{C,F(C)}$ είναι αμφίρριψη, έπεται ότι $\varepsilon_{F(C)} \circ F(\eta_C) = \text{id}_{F(C)}$. $\square$

Ισχύει και το αντίστροφο. Αν δοθούν συναρτητές F, U και φυσικοί μετασχηματισμοί $\eta : \text{Id} \Rightarrow UF$ και $\varepsilon : FU \Rightarrow \text{Id}$ που ικανοποιούν τις δύο ταυτότητες, τότε $F \dashv U$.⁶ Οι ταυτότητες τριγώνου δίνουν λοιπόν έναν δεύτερο, ισοδύναμο ορισμό της προσάρτησης, που δεν αναφέρεται σε Hom -σύνολα.

Απόδειξη του αντιστρόφου. Ορίζουμε $\Phi_{C,D}(h) = U(h) \circ \eta_C$ για $h : F(C) \rightarrow D$ και $\Psi_{C,D}(k) = \varepsilon_D \circ F(k)$ για $k : C \rightarrow U(D)$. Από τη φυσικότητα της ε και την ταυτότητα $\varepsilon F \circ F\eta = \text{id}_F$ έχουμε

$$\Psi\Phi(h) = \varepsilon_D \circ FU(h) \circ F(\eta_C) = h \circ \varepsilon_{F(C)} \circ F(\eta_C) = h.$$

Από τη φυσικότητα της η και την ταυτότητα $U\varepsilon \circ \eta U = \text{id}_U$ έχουμε

$$\Phi\Psi(k) = U(\varepsilon_D) \circ UF(k) \circ \eta_C = U(\varepsilon_D) \circ \eta_{U(D)} \circ k = k.$$

Άρα η Φ είναι αμφίρριψη. Για τη φυσικότητα, αν $f : C' \rightarrow C$ και $g : D \rightarrow D'$, τότε $\Phi(g \circ h \circ F(f)) = U(g) \circ U(h) \circ UF(f) \circ \eta_{C'} = U(g) \circ U(h) \circ \eta_C \circ f = U(g) \circ \Phi(h) \circ f$, όπου χρησιμοποιήσαμε τη φυσικότητα της η . $\square$

⁶Βλ. ενότητα 13.6 του βιβλίου μας.

Παράδειγμα 4.2. Στην ελεύθερη ομάδα ελέγχουμε τις δύο ταυτότητες απευθείας. Για την πρώτη, ένα στοιχείο $g \in U(G)$ πηγαίνει με την $\eta_{U(G)}$ στη λέξη με ένα γράμμα, το g , και αυτή με την $U(\varepsilon_G)$ στο γινόμενο της, που είναι πάλι το g . Για τη δεύτερη, ένας γεννήτορας s της $F(S)$ πηγαίνει με την $F(\eta_S)$ στον γεννήτορα της $FUF(S)$ που αντιστοιχεί στο στοιχείο s της $UF(S)$, και αυτός με την $\varepsilon_{F(S)}$ στο στοιχείο s της $F(S)$. Επειδή η $F(S)$ παράγεται από τους γεννήτορες, η σύνθεση είναι η ταυτοτική.

5 Περισσότερα παραδείγματα

Η δομή της ελεύθερης ομάδας επαναλαμβάνεται σε πολλά μέρη.⁷ Στα πρώτα παραδείγματα ο αριστερός συζυγής κατασκευάζει κάτι ελεύθερα και ο δεξιός ξεχνά ή εμφυτεύει.

Παράδειγμα 5.1 (Ελεύθερος διανυσματικός χώρος και ελεύθερο μονοειδές). Ο ελεύθερος διανυσματικός χώρος $\mathbb{F}^{(S)}$ έχει βάση το S . Μια γραμμική απεικόνιση από αυτόν σε έναν χώρο V ορίζεται από τις εικόνες της βάσης, οπότε $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^{(S)}, V) \cong \mathbf{Set}(S, U(V))$. Η μονάδα στέλνει το s στο διάνυσμα βάσης e_s , και η συν-μονάδα $\mathbb{F}^{(U(V))} \rightarrow V$ υπολογίζει τους γραμμικούς συνδυασμούς, με $e_v \mapsto v$. Το ίδιο ισχύει για το ελεύθερο μονοειδές S^* των λέξεων με πράξη την παράθεση, όπου $\mathbf{Mon}(S^*, M) \cong \mathbf{Set}(S, U(M))$.

Παράδειγμα 5.2 (Αβελιανοποίηση). Η αβελιανοποίηση $G^{\text{ab}} = G/[G, G]$ μιας ομάδας είναι αριστερός συζυγής της εμφύτευσης $\iota : \mathbf{Ab} \hookrightarrow \mathbf{Grp}$,

$$\mathbf{Ab}(G^{\text{ab}}, A) \cong \mathbf{Grp}(G, \iota(A)).$$

Κάθε ομομορφισμός από την G σε μια αβελιανή ομάδα A διέρχεται μοναδικά από την προβολή $G \rightarrow G^{\text{ab}}$. Εδώ ο δεξιός συζυγής δεν είναι επιλήσμων συναρτητής, αλλά εμφύτευση.

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι ο ίδιος συναρτητής μπορεί να έχει και αριστερό και δεξιό συζυγή.

Παράδειγμα 5.3 (Διακριτή και αδιάκριτη τοπολογία). Έστω $U : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ ο επιλήσμων. Ο συναρτητής $\text{Disc} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$ που δίνει σε κάθε σύνολο τη διακριτή τοπολογία είναι αριστερός συζυγής του U , γιατί κάθε συνάρτηση από διακριτό χώρο είναι συνεχής. Άρα $\mathbf{Top}(\text{Disc}(S), X) \cong \mathbf{Set}(S, U(X))$. Ο συναρτητής $\text{Ind} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$ που δίνει την αδιάκριτη τοπολογία (ανοικτά μόνο το $\emptyset$ και το S) είναι δεξιός συζυγής του U , γιατί κάθε συνάρτηση προς έναν αδιάκριτο χώρο είναι συνεχής. Άρα $\mathbf{Set}(U(X), S) \cong \mathbf{Top}(X, \text{Ind}(S))$. Έχουμε δηλαδή $\text{Disc} \dashv U \dashv \text{Ind}$. Ο U είναι δεξιός συζυγής στην πρώτη προσάρτηση και αριστερός στη δεύτερη. Ο ρόλος ενός συναρτητή εξαρτάται από το ζεύγος και όχι από τον ίδιο.

Η προσάρτηση δεν χρειάζεται ελεύθερες κατασκευές για να υπάρξει. Σε μια κατηγορία που προέρχεται από διατεταγμένο σύνολο γίνεται πολύ απλή.

Παράδειγμα 5.4 (Άνω και κάτω ακέραιο μέρος). Ένα διατεταγμένο σύνολο $(P, \leq)$ γίνεται κατηγορία με ένα μορφισμό $a \rightarrow b$ ακριβώς όταν $a \leq b$. Οι συναρτητές είναι οι μονότονες απεικονίσεις, και μια προσάρτηση $F \dashv U$ ισοδυναμεί με την ισοδυναμία

$$F(a) \leq b \iff a \leq U(b).$$

Θεωρούμε την εμφύτευση $\iota : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$. Για $x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{Z}$ ισχύει

$$\lfloor x \rfloor \leq n \iff x \leq n \quad \text{και} \quad n \leq \lfloor x \rfloor \iff n \leq x,$$

δηλαδή $\lfloor - \rfloor \dashv \iota \dashv \lfloor - \rfloor$. Η μονάδα της πρώτης προσάρτησης είναι η γνωστή ανισότητα $x \leq \lfloor x \rfloor$ και η συν-μονάδα της δεύτερης η $\lfloor x \rfloor \leq x$. Επειδή κάθε Hom -σύνολο έχει το πολύ ένα στοιχείο, η φυσικότητα και οι ταυτότητες τριγώνου ισχύουν αυτομάτως.

⁷Βλ. ενότητες 13.2 και 13.8 του βιβλίου μας.

Τέλος, ένα παράδειγμα που το γνωρίζουν όσοι έχουν προγραμματίσει.

Παράδειγμα 5.5 (Currying). Σταθεροποιούμε ένα σύνολο V . Μια συνάρτηση $A \times V \rightarrow Y$ και μια συνάρτηση $A \rightarrow Y^V$, όπου $Y^V = \mathbf{Set}(V, Y)$ είναι το σύνολο των συναρτήσεων από το V στο Y , αντιστοιχούν η μία στην άλλη. Στέλνουμε τη $h : A \times V \rightarrow Y$ στη συνάρτηση που δίνει σε κάθε a τη $u \mapsto h(a, u)$. Έχουμε λοιπόν

$$\mathbf{Set}(A \times V, Y) \cong \mathbf{Set}(A, Y^V),$$

δηλαδή $(-) \times V \dashv (-)^V$. Η συν-μονάδα $Y^V \times V \rightarrow Y$ είναι η αποτίμηση $(\varphi, v) \mapsto \varphi(v)$, και η μονάδα $A \rightarrow (A \times V)^V$ στέλνει το a στη συνάρτηση $u \mapsto (a, u)$.

Στα περισσότερα από αυτά τα παραδείγματα ο αριστερός συζυγής «κατασκευάζει ελεύθερα» και ο δεξιός «ξεχνά». Τα παραδείγματα των τοπολογιών, των διατεταγμένων συνόλων και του currying δείχνουν ότι ο κανόνας αυτός δεν ισχύει πάντοτε.

6 Οι συζυγείς συναρτητές και τα όρια

Ένα από τα πιο χρήσιμα αποτελέσματα για τις προσαρτήσεις είναι ότι οι δύο συναρτητές συμπεριφέρονται αντίθετα απέναντι στα γινόμενα και στα συν-γινόμενα. Θα το δούμε για τα γινόμενα και θα πούμε τι ισχύει για τα συν-γινόμενα.

Πρόταση 6.1. Έστω $F \dashv U$ και $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ δύο αντικείμενα που έχουν γινόμενο $D_1 \times D_2$ στην $\mathcal{D}$. Αν η $\mathcal{C}$ έχει το γινόμενο $U(D_1) \times U(D_2)$, τότε ο κανονικός μορφισμός

$$U(D_1 \times D_2) \longrightarrow U(D_1) \times U(D_2),$$

με συνιστώσες τα $U(\pi_1)$ και $U(\pi_2)$, είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Για κάθε $C \in \mathcal{C}$ έχουμε διαδοχικά, με φυσικές αντιστοιχίες,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(C, U(D_1 \times D_2)) &\cong \mathcal{D}(F(C), D_1 \times D_2) \\ &\cong \mathcal{D}(F(C), D_1) \times \mathcal{D}(F(C), D_2) \\ &\cong \mathcal{C}(C, U(D_1)) \times \mathcal{C}(C, U(D_2)) \\ &\cong \mathcal{C}(C, U(D_1) \times U(D_2)). \end{aligned}$$

Η πρώτη και η τρίτη αντιστοιχία είναι η προσάρτηση, η δεύτερη και η τέταρτη η καθολική ιδιότητα του γινομένου. Οι αντιστοιχίες είναι φυσικές ως προς C . Άρα τα αντικείμενα $U(D_1 \times D_2)$ και $U(D_1) \times U(D_2)$ αναπαριστούν τον ίδιο συναρτητή, και από το λήμμα Yoneda είναι ισόμορφα.⁸ $\square$

Λέμε ότι ο U διατηρεί τα γινόμενα. Το ίδιο επιχείρημα, με τα βέλη αντεστραμμένα, δείχνει ότι ο αριστερός συζυγής F διατηρεί τα συν-γινόμενα. Αρκεί να γράψουμε

$$\mathcal{D}(F(C_1 + C_2), E) \cong \mathcal{C}(C_1 + C_2, U(E)) \cong \mathcal{C}(C_1, U(E)) \times \mathcal{C}(C_2, U(E)) \cong \mathcal{D}(F(C_1) + F(C_2), E).$$

Το ίδιο ισχύει γενικότερα με τα όρια και τα συν-όρια. Ένας δεξιός συζυγής διατηρεί όλα τα όρια που υπάρχουν, και ένας αριστερός συζυγής όλα τα συν-όρια. Εδώ το αποδείξαμε μόνο για γινόμενα και συν-γινόμενα.⁹

Παράδειγμα 6.2. Ο επιλήσμων $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ είναι δεξιός συζυγής, και πράγματι το υποκείμενο σύνολο του ευθέως γινομένου $G \times H$ είναι το καρτεσιανό γινόμενο των υποκείμενων συνόλων. Η ελεύθερη ομάδα, αντίστροφα, είναι αριστερός συζυγής, και έτσι στέλνει την ξένη ένωση $S \sqcup T$ στο συν-γινόμενο των ομάδων, δηλαδή στο ελεύθερο γινόμενο, $F(S \sqcup T) \cong F(S) * F(T)$.¹⁰ Για την ελεύθερη ομάδα με

⁸Βλ. ενότητα 12.6 του βιβλίου μας. Ο ισομορφισμός που προκύπτει είναι ο κανονικός, γιατί η ταυτότητα του $U(D_1 \times D_2)$ αντιστοιχεί στις συνιστώσες $U(\pi_1)$ και $U(\pi_2)$.

⁹Η γενική πρόταση δεν αποδεικνύεται στο βιβλίο μας. Βλ. S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, 2η έκδ., Springer, 1998, κεφάλαιο V.

¹⁰Για το ευθύ και το ελεύθερο γινόμενο βλ. υποενότητα 8.8.2 του βιβλίου μας.

δύο γεννήτορες, $F(\{a, b\}) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, όπως περιμένουμε.

Η πληροφορία αυτή προκύπτει αμέσως από την ύπαρξη της προσάρτησης. Αν γνωρίζουμε ότι ένας συναρτητής είναι αριστερός ή δεξιός συζυγής, γνωρίζουμε ότι διατηρεί συν-όρια ή όρια, χωρίς να ελέγξουμε κάθε περίπτωση χωριστά. Αντίστροφα, ένας συναρτητής που δεν διατηρεί συν-γινόμενα δεν μπορεί να είναι αριστερός συζυγής. Για παράδειγμα, ο $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ δεν διατηρεί τα συν-γινόμενα, γιατί ο κανονικός μορφισμός $U(\mathbb{Z}) \sqcup U(\mathbb{Z}) \rightarrow U(\mathbb{Z} * \mathbb{Z})$ δεν είναι επί. Στην εικόνα του υπάρχουν μόνο οι λέξεις με ένα γράμμα, και λείπει, για παράδειγμα, η λέξη ab , όπου το a προέρχεται από το πρώτο και το b από το δεύτερο αντίγραφο του $\mathbb{Z}$. Αν ο U ήταν αριστερός συζυγής, θα διατηρούσε τα συν-γινόμενα, άρα ο συγκεκριμένος κανονικός μορφισμός θα έπρεπε να είναι ισομορφισμός. Δεν είναι, και επομένως ο U δεν είναι αριστερός συζυγής, δηλαδή δεν έχει δεξιό συζυγή. Έχει όμως αριστερό, τον F .

7 Σύνοψη

- Μια προσάρτηση $F \dashv U$ είναι μια φυσική αμφίρριψη $\mathcal{D}(F(C), D) \cong \mathcal{C}(C, U(D))$. Ο F είναι ο αριστερός και ο U ο δεξιός συζυγής.
- Στην ελεύθερη ομάδα, ένας ομομορφισμός $F(S) \rightarrow G$ είναι το ίδιο πράγμα με μια συνάρτηση $S \rightarrow U(G)$. Η επιλογή των εικόνων των γεννητόρων καθορίζει τον ομομορφισμό.
- Οι F και U δεν είναι αντίστροφοι. Η μονάδα $\eta : \text{Id} \Rightarrow UF$ και η συν-μονάδα $\varepsilon : FU \Rightarrow \text{Id}$ μετρούν πόσο απέχουν από το να είναι.
- Η μονάδα και η συν-μονάδα ικανοποιούν τις ταυτότητες τριγώνου, και αντίστροφα οι ταυτότητες τριγώνου ορίζουν την προσάρτηση.
- Ο αριστερός συζυγής διατηρεί τα συν-γινόμενα (και τα συν-όρια) και ο δεξιός τα γινόμενα (και τα όρια).
- Από μια προσάρτηση $F \dashv U$ προκύπτει ο ενδοσυναρτητής $T = U \circ F$ με τη μονάδα η και τη συνένωση $\mu = U\varepsilon F$. Αυτή είναι μια μονάδα (monad), που τη μελετάμε στο κεφάλαιο 14 του βιβλίου μας.