Μονοπάτια, ομοτοπία και το θεμελιώδες ομαδοειδές

Μια κατηγορία που προκύπτει μόνο ως προς ομοτοπία

Σημειώσεις που συνοδεύουν το βιβλίο «Εισαγωγή στη Θεωρία Κατηγοριών» των εκδόσεων ΔΙΑΥΛΟΣ.

Σεπτέμβριος 2026

Τα μονοπάτια ενός γράφου σχηματίζουν κατηγορία χωρίς καμία δυσκολία. Δύο διαδοχικά μονοπάτια παρατίθενται και δίνουν μονοπάτι, το κενό μονοπάτι αφήνει κάθε μονοπάτι αμετάβλητο, και η παράθεση είναι προσεταιριστική. Αν δοκιμάσουμε να κάνουμε το ίδιο σε έναν τοπολογικό χώρο, όπου τα μονοπάτια είναι πλέον συνεχείς καμπύλες, θα δούμε ότι η φυσική σύνθεση των καμπυλών δεν ικανοποιεί κατά γράμμα ούτε τον νόμο της ταυτοτικής ούτε την προσεταιριστικότητα. Η αιτία είναι ότι μια καμπύλη δεν καταγράφει μόνο τον δρόμο που διανύουμε αλλά και τον ρυθμό με τον οποίο τον διανύουμε. Η λύση είναι να μην ξεχωρίζουμε μονοπάτια που παραμορφώνονται συνεχώς το ένα στο άλλο, δηλαδή να περάσουμε σε κλάσεις ομοτοπίας. Τότε προκύπτει μια κατηγορία, το θεμελιώδες ομαδοειδές του χώρου, στην οποία κάθε μορφισμός είναι ισομορφισμός, και μέσα σε αυτήν βρίσκουμε τη θεμελιώδη ομάδα.

Τι προϋποθέτουμε. Από την Τοπολογία χρειαζόμαστε τις έννοιες του τοπολογικού χώρου και της συνεχούς απεικόνισης. Τη συνέχεια στο τετράγωνο $[0,1]\times[0,1]$, που χρειάζεται στον ορισμό της ομοτοπίας, την εξετάζουμε χωριστά στην ενότητα 5. Από τη Θεωρία Κατηγοριών χρειαζόμαστε τον ορισμό της κατηγορίας και του ισομορφισμού, όπως τους παρουσιάζουμε στο βιβλίο μας «Εισαγωγή στη Θεωρία Κατηγοριών», στις ενότητες 3.1 και 3.6, και για την τελευταία ενότητα τον ορισμό του συναρτητή, από την ενότητα 5.2. Οι σημειώσεις αναπτύσσουν αναλυτικά την ενότητα 4.4 του βιβλίου, όπου το θέμα παρουσιάζεται συνοπτικά, και δίνουν τις αποδείξεις που εκεί παραλείπονται. Ορισμένοι υπολογισμοί υπάρχουν αναλυτικά στις λύσεις των ασκήσεων του κεφαλαίου 4, που είναι αναρτημένες στον ίδιο ιστότοπο, και σε αυτές παραπέμπουμε όπου χρειάζεται.

Στις σημειώσεις αυτές δοκιμάζουμε κάτι λίγο διαφορετικό από τις υπόλοιπες της σειράς. Πριν από τους ορισμούς ξεκινάμε από μια καθημερινή εικόνα, τη διαδρομή από το σπίτι στο σχολείο, και αφήνουμε την ανάγκη για κάθε έννοια να προκύψει από αυτήν. Στην εικόνα αυτή επιστρέφουμε σε κάθε βήμα. Οι ορισμοί, οι αποδείξεις και ο συμβολισμός παραμένουν ίδιοι με εκείνους του βιβλίου.[1]

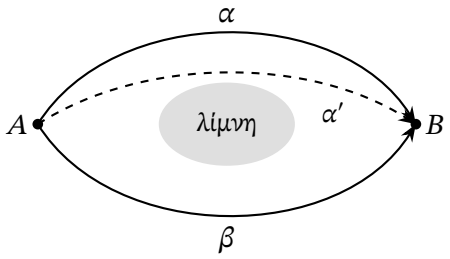
1 Διαδρομές

Ας υποθέσουμε ότι κάθε πρωί πηγαίνουμε με τα πόδια από το σπίτι A στο σχολείο B, και ότι η διαδρομή διαρκεί μία ώρα. Μια διαδρομή μπορούμε να την καταγράψουμε σημειώνοντας, για κάθε στιγμή t ανάμεσα στο 0 και στο 1, το σημείο όπου βρισκόμαστε. Η καταγραφή αυτή είναι μια συνάρτηση από το διάστημα $[0,1]$ στον χάρτη της πόλης. Είναι συνεχής, γιατί δεν μεταφερόμαστε ακαριαία από ένα σημείο σε ένα άλλο.

Μια μέρα βαδίζουμε με σταθερό βήμα. Μια άλλη μέρα, από τον ίδιο δρόμο, βιαζόμαστε στην αρχή και καθυστερούμε στο τέλος. Οι δύο καταγραφές είναι διαφορετικές συναρτήσεις, αφού τη στιγμή $t=\frac{1}{2}$ δεν βρισκόμαστε στο ίδιο σημείο. Κανείς όμως δεν θα έλεγε ότι κάναμε διαφορετική διαδρομή. Ο δρόμος ήταν ο ίδιος, άλλαξε μόνο ο ρυθμός.

[1] Ο τρόπος αυτός παρουσίασης, που ξεκινά από την ανάγκη για μια έννοια και από καθημερινά παραδείγματα πριν από τον ορισμό, είναι εμπνευσμένος από το βιβλίο της Eugenia Cheng, *The Joy of Abstraction. An Exploration of Math, Category Theory, and Life*, Cambridge University Press, 2022. Η Cheng αναφέρεται στα μονοπάτια και στην ομοτοπία στις σσ. 307, 330 και 335.

Ας προχωρήσουμε ένα βήμα. Ανάμεσα στο σπίτι και στο σχολείο υπάρχει μια λίμνη. Μπορούμε να την παρακάμψουμε από βορρά ή από νότο, και από κάθε πλευρά υπάρχουν πολλοί δρόμοι.



Οι διαδρομές α και α' περνούν από διαφορετικούς δρόμους, και οι δύο όμως βόρεια της λίμνης. Μπορούμε να μετακινήσουμε σιγά σιγά τη μία ώστε να γίνει η άλλη, χωρίς να βραχούμε. Η β αντίθετα περνά νότια. Για να τη φέρουμε στη θέση της α πρέπει κάποια στιγμή να περάσουμε μέσα από τη λίμνη. Λέμε λοιπόν ότι οι α και α' είναι ουσιαστικά η ίδια διαδρομή, ενώ η β είναι ουσιαστικά διαφορετική.

Τώρα ας συνδυάσουμε διαδρομές. Αν πηγαίνουμε από το σπίτι στον φούρνο και από τον φούρνο στο σχολείο, η συνολική διαδρομή είναι η πρώτη ακολουθούμενη από τη δεύτερη. Αν όμως η κάθε διαδρομή καταγράφεται σε μία ώρα, και η σύνθεση πρέπει να καταγραφεί σε μία ώρα. Το πιο απλό είναι να διανύσουμε κάθε σκέλος σε μισή ώρα, δηλαδή με διπλή ταχύτητα. Με τρία σκέλη, από το σπίτι στον φούρνο, από τον φούρνο στο περίπτερο και από το περίπτερο στο σχολείο, η κατανομή του χρόνου εξαρτάται από το ποια δύο σκέλη ενώνουμε πρώτα. Τα σκέλη είναι τα ίδια, ο ρυθμός όμως αλλάζει.

Υπάρχουν και δύο ακόμη περιπτώσεις που θα μας απασχολήσουν. Η πρώτη είναι η «διαδρομή» κατά την οποία μένουμε ακίνητοι σε ένα σημείο. Αν πρώτα πάμε στο σχολείο και μετά μείνουμε εκεί, φτάνουμε στο σχολείο σε μισή ώρα και περιμένουμε εκεί την υπόλοιπη. Αν πρώτα μείνουμε στο σπίτι και μετά ξεκινήσουμε, περιμένουμε μισή ώρα στο σπίτι και διανύουμε τη διαδρομή στη δεύτερη μισή. Η δεύτερη είναι η διαδρομή κατά την οποία πηγαίνουμε ως το σχολείο και επιστρέφουμε από τον ίδιο δρόμο. Ως καταγραφή διαφέρει από την παραμονή στο σπίτι. Μπορούμε όμως να τη «μαζέψουμε» σιγά σιγά, γυρίζοντας κάθε φορά λίγο νωρίτερα, ώσπου να μη βγαίνουμε καθόλου από το σπίτι.

Όλα αυτά οδηγούν στο ίδιο ερώτημα, πότε δύο διαδρομές με την ίδια αφετηρία και τον ίδιο προορισμό είναι *ουσιαστικά* οι ίδιες. Η εικόνα υποδεικνύει την απάντηση. Τις θεωρούμε ίδιες όταν η μία μετακινείται συνεχώς ώσπου να γίνει η άλλη, με σταθερή αφετηρία και σταθερό προορισμό. Η ακριβής διατύπωση αυτής της ιδέας είναι η ομοτοπία. Στις επόμενες ενότητες κάνουμε την εικόνα ακριβή. Ο χάρτης της πόλης γίνεται ένας τοπολογικός χώρος X, η διαδρομή γίνεται μονοπάτι, και τα σπίτια, οι φούρνοι και τα σχολεία γίνονται σημεία του X.

2 Μονοπάτια και η σύνθεσή τους

Ορισμός 2.1 (Μονοπάτι). Έστω X τοπολογικός χώρος. **Μονοπάτι** στο X είναι μια συνεχής απεικόνιση $\gamma : [0,1] \to X$. Η *αρχή* του μονοπατιού είναι το σημείο $\gamma(0)$ και το *τέλος* του το σημείο $\gamma(1)$. Αν $\gamma(0) = x$ και $\gamma(1) = y$, λέμε ότι το γ είναι μονοπάτι από το x στο y και το σημειώνουμε με ένα βέλος,

$$x \xrightarrow{\gamma} y.$$

Μπορούμε να φανταζόμαστε την παράμετρο $t \in [0,1]$ ως χρόνο. Τη στιγμή t βρισκόμαστε στο σημείο $\gamma(t)$ του χώρου.

Για κάθε σημείο $x \in X$ έχουμε το **σταθερό μονοπάτι** $c_x : [0,1] \to X$ με $c_x(t) = x$ για κάθε t. Είναι το μονοπάτι κατά το οποίο μένουμε ακίνητοι στο x σε όλη τη διάρκεια του χρόνου.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το γ είναι μονοπάτι από το x στο y και το δ μονοπάτι από το y στο z, ώστε το γ να τελειώνει εκεί όπου αρχίζει το δ. Θέλουμε ένα μονοπάτι από το x στο z που διατρέχει πρώτα το γ και μετά το δ. Ο χρόνος που διαθέτουμε είναι πάλι το διάστημα $[0,1]$, οπότε διατρέχουμε το γ στο πρώτο μισό και το δ στο δεύτερο, και τα δύο με διπλή ταχύτητα.

Ορισμός 2.2 (Σύνθεση μονοπατιών)**.** Αν γ είναι μονοπάτι από το x στο y και δ μονοπάτι από το y στο z, η **σύνθεση** $\delta * \gamma$ είναι το μονοπάτι

$$(\delta * \gamma)(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \delta(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Γράφουμε $\delta * \gamma$ και όχι $\gamma * \delta$, ώστε η σειρά να συμφωνεί με τη σύνθεση μορφισμών $g \circ f$, όπου ο μορφισμός που εφαρμόζεται πρώτος γράφεται δεξιά. Στο $t = \frac{1}{2}$ οι δύο κλάδοι δίνουν $\gamma(1) = y$ και $\delta(0) = y$, άρα συμφωνούν. Κάθε κλάδος είναι συνεχής στο αντίστοιχο κλειστό διάστημα, οπότε από το λήμμα επικόλλησης[2] η $\delta * \gamma$ είναι συνεχής, δηλαδή είναι πράγματι μονοπάτι. Το λήμμα επικόλλησης θα το χρησιμοποιούμε στη συνέχεια για κάθε απεικόνιση που ορίζεται κατά τμήματα σε κλειστά κομμάτια, χωρίς να το αναφέρουμε κάθε φορά.

3 Μια κατηγορία που δεν προκύπτει

Ας προσπαθήσουμε να φτιάξουμε κατηγορία με τον ίδιο τρόπο που την φτιάξαμε για τους γράφους.[3]

- Αντικείμενα είναι τα σημεία του X.
- Μορφισμοί από το x στο y είναι τα μονοπάτια από το x στο y.
- Σύνθεση είναι η $*$ του Ορισμού 2.2.
- Ταυτοτικός μορφισμός του x είναι το σταθερό μονοπάτι c_x.

Για να είναι αυτό κατηγορία πρέπει να ισχύουν οι δύο νόμοι, ο νόμος της ταυτοτικής και η προσεταιριστικότητα. Θα δούμε ότι αποτυγχάνουν και οι δύο.

Ο νόμος της ταυτοτικής

Για ένα μονοπάτι γ από το x στο y θα θέλαμε $c_y * \gamma = \gamma$ και $\gamma * c_x = \gamma$. Ας υπολογίσουμε την πρώτη σύνθεση. Από τον ορισμό,

$$(c_y * \gamma)(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ y, & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Η $c_y * \gamma$ διατρέχει ολόκληρο το γ στο πρώτο μισό του χρόνου και στο δεύτερο μισό μένει ακίνητη στο y. Η γ αντίθετα χρησιμοποιεί ολόκληρο το διάστημα $[0,1]$. Οι δύο απεικονίσεις περνούν από τα ίδια σημεία, αλλά με διαφορετικό ρυθμό, και γι' αυτό γενικά δεν είναι ίσες. Η $c_y * \gamma$ είναι η μέρα της ενότητας 1 όπου φτάσαμε στο σχολείο σε μισή ώρα και περιμέναμε εκεί την υπόλοιπη.

[2] Αν ένας τοπολογικός χώρος γράφεται ως ένωση δύο κλειστών υποσυνόλων A και B και οι απεικονίσεις $f : A \to Y$, $g : B \to Y$ είναι συνεχείς και συμφωνούν στο $A \cap B$, τότε η απεικόνιση που ορίζεται κατά τμήματα από τις f και g είναι συνεχής. Βλ. J. R. Munkres, *Topology*, 2nd ed., Prentice Hall, 2000, σ. 108, Θεώρημα 18.3. Στις λύσεις των ασκήσεων του κεφαλαίου 4, Άσκηση 4.3, φαίνεται γιατί η υπόθεση ότι τα A και B είναι κλειστά δεν μπορεί να παραλειφθεί.

[3] Βλ. ενότητα 2.3 και το σχόλιο για την ελεύθερη κατηγορία μονοπατιών στην ενότητα 3.2 του βιβλίου μας.

Παράδειγμα 3.1 (Ο νόμος της ταυτοτικής στο $\mathbb{R}$)**.** Έστω $X = \mathbb{R}$ και $\gamma(t) = t$, μονοπάτι από το 0 στο 1. Τη στιγμή $t = \frac{1}{2}$ έχουμε $(c_1 * \gamma)(\frac{1}{2}) = \gamma(1) = 1$, ενώ $\gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Άρα $c_1 * \gamma \neq \gamma$.

Στην πραγματικότητα η ισότητα $c_y * \gamma = \gamma$ ισχύει μόνο όταν το γ είναι σταθερό.[4] Το ίδιο πρόβλημα παρουσιάζεται και στη δεύτερη ισότητα, όπου η $\gamma * c_x$ μένει ακίνητη στο x στο πρώτο μισό του χρόνου και διατρέχει το γ στο δεύτερο.

Η προσεταιριστικότητα

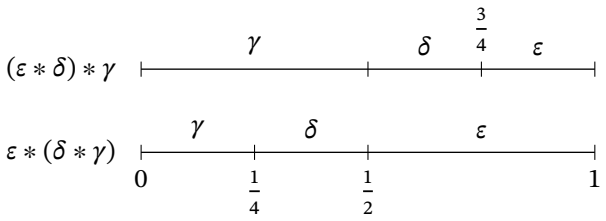
Έστω τρία διαδοχικά μονοπάτια, το γ από το w στο x, το δ από το x στο y και το ε από το y στο z. Μπορούμε να τα συνθέσουμε με δύο τρόπους. Στη σύνθεση $(\varepsilon * \delta) * \gamma$ διατρέχουμε το γ στο πρώτο μισό του χρόνου και το $\varepsilon * \delta$ στο δεύτερο, άρα

$$\big((\varepsilon * \delta) * \gamma\big)(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \delta(4t-2), & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ \varepsilon(4t-3), & \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Στη σύνθεση $\varepsilon * (\delta * \gamma)$ διατρέχουμε το $\delta * \gamma$ στο πρώτο μισό και το ε στο δεύτερο, άρα

$$\big(\varepsilon * (\delta * \gamma)\big)(t) = \begin{cases} \gamma(4t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ \delta(4t-1), & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \varepsilon(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Οι δύο κατανομές του χρόνου φαίνονται καθαρά αν τις βάλουμε τη μία κάτω από την άλλη.



Και οι δύο συνθέσεις διατρέχουν τα ίδια σημεία με την ίδια σειρά, αλλά με διαφορετικό ρυθμό. Ως απεικονίσεις $[0,1] \to X$ γενικά δεν είναι ίσες. Για παράδειγμα, τη στιγμή $t = \frac{1}{2}$ η πρώτη βρίσκεται στο $\gamma(1) = x$ και η δεύτερη στο $\delta(1) = y$, οπότε, αν $x \neq y$, οι δύο συνθέσεις διαφέρουν.[5]

Ας δούμε τη διαφορά σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, όπου μπορούμε να σχεδιάσουμε τις δύο συνθέσεις.

Παράδειγμα 3.2 (Δύο συνθέσεις που διαφέρουν)**.** Έστω $X = \mathbb{R}$ και τα τρία διαδοχικά μονοπάτια

$$\gamma(t) = t, \qquad \delta(t) = 1 + t, \qquad \varepsilon(t) = 2 + t,$$

που διατρέχουν με σταθερό ρυθμό τα διαστήματα $[0,1]$, $[1,2]$ και $[2,3]$ αντίστοιχα. Το γ πηγαίνει από το 0 στο 1, το δ από το 1 στο 2 και το ε από το 2 στο 3. Θέτουμε $\sigma_1 = (\varepsilon * \delta) * \gamma$ και $\sigma_2 = \varepsilon * (\delta * \gamma)$ και αντικαθιστούμε στους τύπους που βρήκαμε.

[4] Αν $c_y * \gamma = \gamma$, τότε $\gamma(2t) = \gamma(t)$ για κάθε $t \in [0, \frac{1}{2}]$, άρα $\gamma(t) = \gamma(t/2) = \gamma(t/4) = \cdots = \gamma(t/2^n)$ για κάθε n. Επειδή $t/2^n \to 0$ και η γ είναι συνεχής, παίρνουμε $\gamma(t) = \gamma(0)$ για κάθε t.

[5] Ο υπολογισμός αυτός είναι η Άσκηση 4.4 του βιβλίου μας. Βλ. τις λύσεις των ασκήσεων του κεφαλαίου 4.

Για τη σ_1 έχουμε $\gamma(2t) = 2t$ στο $[0, \frac{1}{2}]$, $\delta(4t-2) = 4t-1$ στο $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ και $\varepsilon(4t-3) = 4t-1$ στο $[\frac{3}{4}, 1]$. Οι δύο τελευταίοι κλάδοι έχουν τον ίδιο τύπο, οπότε

$$\sigma_1(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ 4t-1, & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

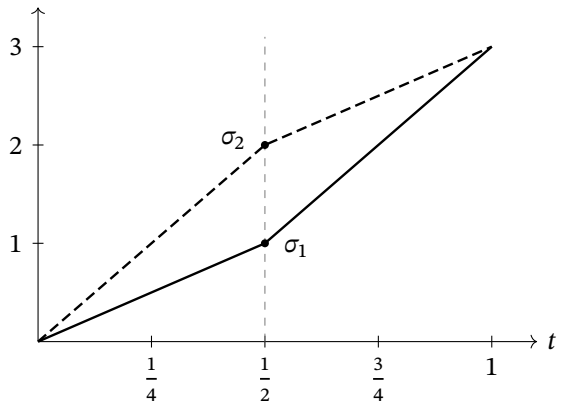
Για τη σ_2 έχουμε $\gamma(4t) = 4t$ στο $[0, \frac{1}{4}]$, $\delta(4t-1) = 4t$ στο $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ και $\varepsilon(2t-1) = 2t+1$ στο $[\frac{1}{2}, 1]$, οπότε

$$\sigma_2(t) = \begin{cases} 4t, & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ 2t+1, & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Και οι δύο είναι μονοπάτια από το 0 στο 3 και περνούν από όλα τα σημεία του $[0,3]$ με την ίδια σειρά. Η σ_1 όμως κινείται αργά στο πρώτο μισό του χρόνου και γρήγορα στο δεύτερο, ενώ η σ_2 κάνει το αντίθετο. Τη στιγμή $t = \frac{1}{2}$ έχουμε

$$\sigma_1(\tfrac{1}{2}) = 1 \neq 2 = \sigma_2(\tfrac{1}{2}),$$

και τη στιγμή $t = \frac{1}{4}$ έχουμε $\sigma_1(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$ ενώ $\sigma_2(\frac{1}{4}) = 1$. Άρα $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των δύο συνθέσεων. Οι δύο αυτές γραφικές παραστάσεις ξεκινούν από το ίδιο σημείο και καταλήγουν στο ίδιο σημείο, αλλά ενδιάμεσα δεν συμπίπτουν πουθενά.



Η συνεχής γραμμή είναι η σ_1 και η διακεκομμένη η σ_2.

Η κατασκευή λοιπόν δεν δίνει κατηγορία. Αποτυγχάνει και στους δύο νόμους, και για τον ίδιο λόγο. Η σύνθεση ορίζεται σωστά, αλλά οι απεικονίσεις $[0,1] \to X$ ξεχωρίζουν μονοπάτια που διαφέρουν μόνο στον ρυθμό με τον οποίο διανύονται. Χρειαζόμαστε μια σχέση ισοδυναμίας που να μην κάνει αυτή τη διάκριση.

4 Η ομοτοπία σχετικά με τα άκρα

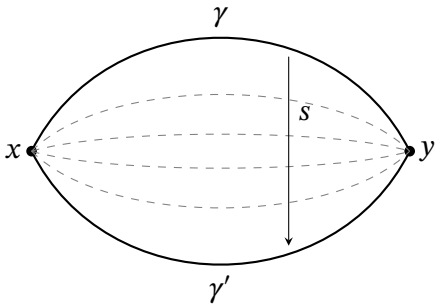
Δύο μονοπάτια με την ίδια αρχή και το ίδιο τέλος θα τα θεωρούμε ισοδύναμα αν το ένα παραμορφώνεται συνεχώς στο άλλο, χωρίς να μετακινηθούν τα άκρα.

Ορισμός 4.1 (Ομοτοπία σχετικά με τα άκρα). Έστω $\gamma, \gamma' : [0,1] \to X$ δύο μονοπάτια από το x στο y. Τα γ και γ' λέγονται **ομοτοπικά σχετικά με τα άκρα**, και γράφουμε $\gamma \sim \gamma'$, αν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ με

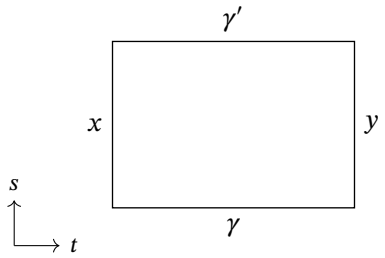
$$H(t,0) = \gamma(t), \qquad H(t,1) = \gamma'(t), \qquad H(0,s) = x, \qquad H(1,s) = y$$

για κάθε $t, s \in [0,1]$. Η H λέγεται **ομοτοπία** από το γ στο γ'.

Η παράμετρος t είναι ο χρόνος κατά μήκος του μονοπατιού, όπως πριν. Η νέα παράμετρος s ελέγχει την παραμόρφωση. Για κάθε σταθερό s η απεικόνιση $t \mapsto H(t,s)$ είναι μονοπάτι από το x στο y, το οποίο για $s = 0$ είναι το γ και για $s = 1$ το γ'. Καθώς το s μεταβάλλεται από το 0 στο 1, τα ενδιάμεσα μονοπάτια μεταβάλλονται συνεχώς.



Οι τιμές της H στις τέσσερις πλευρές του τετραγώνου $[0,1] \times [0,1]$ συγκεντρώνονται στο παρακάτω σχήμα. Στην κάτω πλευρά έχουμε το γ, στην πάνω το γ', και οι δύο κατακόρυφες πλευρές μένουν σταθερές στα άκρα.



Η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των μονοπατιών από το x στο y. Η ανακλαστικότητα προκύπτει από τη σταθερή ομοτοπία $H(t,s) = \gamma(t)$, η συμμετρία από την ομοτοπία $H(t,1-s)$, που διατρέχει την H αντίστροφα, και η μεταβατικότητα από την παράθεση δύο ομοτοπιών κατά την παράμετρο s.[6] Γράφουμε $[\gamma]$ για την κλάση ισοδυναμίας του γ και τη λέμε **κλάση ομοτοπίας** του γ.

Παρατήρηση 4.2. Στη βιβλιογραφία της Τοπολογίας η ομοτοπία συμβολίζεται συχνά με $\simeq$. Εδώ, όπως και στο βιβλίο μας, γράφουμε $\sim$, γιατί το $\cong$ είναι δεσμευμένο για τους ισομορφισμούς και το $\simeq$ για τις ισοδυναμίες κατηγοριών.

5 Η συνέχεια στο τετράγωνο

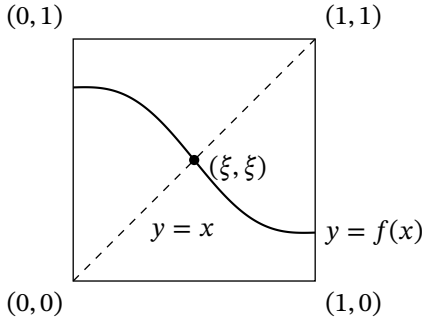
Στον Ορισμό 4.1 ζητήσαμε η ομοτοπία H να είναι συνεχής απεικόνιση με πεδίο ορισμού το τετράγωνο $[0,1] \times [0,1]$. Ας δούμε τι σημαίνει αυτό. Το τετράγωνο το έχουμε συναντήσει ήδη στο λύκειο. Εμφανίζεται σε μια γνωστή άσκηση του σχολικού βιβλίου,[7] και από αυτήν ξεκινάμε.

Παράδειγμα 5.1 (Μια άσκηση του λυκείου)**.** Θεωρούμε το μοναδιαίο τετράγωνο με κορυφές $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ και $(0,1)$, τη διαγώνιό του, δηλαδή το ευθύγραμμο τμήμα της ευθείας $y = x$ από το $(0,0)$ στο $(1,1)$, και μια συνάρτηση f, συνεχή στο $[0,1]$, της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο τετράγωνο. Η άσκηση ζητά να δείξουμε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει

[6] Οι λεπτομέρειες είναι η Άσκηση 4.9 του βιβλίου μας. Βλ. τις λύσεις των ασκήσεων του κεφαλαίου 4.

[7] Μαθηματικά Γ′ Γενικού Λυκείου, Β′ Μέρος, σχολικό βιβλίο, σ. 82, άσκηση 8.

οπωσδήποτε τη διαγώνιο.



Η άσκηση αποδεικνύεται με το θεώρημα Bolzano. Το συμπέρασμά της είναι ότι υπάρχει $\xi \in [0,1]$ με $f(\xi) = \xi$, δηλαδή η γραφική παράσταση της f περνά από ένα σημείο (ξ, ξ) της διαγωνίου.

Ας ξαναδιαβάσουμε την άσκηση με τη γλώσσα των μονοπατιών. Η απεικόνιση

$$\gamma(x) = \big(x, f(x)\big), \qquad x \in [0,1],$$

είναι ένα μονοπάτι μέσα στο τετράγωνο, που ξεκινά από την αριστερή πλευρά και καταλήγει στη δεξιά. Η διαγώνιος είναι το μονοπάτι $\delta(x) = (x, x)$, από την κάτω αριστερή κορυφή στην πάνω δεξιά. Η άσκηση λέει ότι οι δύο γραμμές τέμνονται, και με τη γλώσσα των μονοπατιών λέει λίγο περισσότερα. Αφού $\gamma(\xi) = (\xi, f(\xi)) = (\xi, \xi) = \delta(\xi)$, τα δύο μονοπάτια βρίσκονται τη στιγμή ξ στο ίδιο σημείο. Αυτό οφείλεται στο ότι τα γ και δ έχουν κάθε στιγμή την ίδια πρώτη συντεταγμένη. Για δύο τυχαία μονοπάτια, το ότι οι γραμμές τους τέμνονται δεν σημαίνει ότι περνούν από το κοινό σημείο την ίδια στιγμή. Στη γλώσσα των διαδρομών της ενότητας 1, δύο πεζοί διασχίζουν την ίδια πλατεία, ο ένας από την αριστερή πλευρά στη δεξιά και ο άλλος διαγώνια, και κάποια στιγμή συναντιούνται.

Το τετράγωνο εμφανίζεται εδώ με δύο τρόπους, και οι δύο θα μας χρειαστούν.

Απεικονίσεις προς το τετράγωνο. Ας δούμε πρώτα γιατί το γ είναι συνεχές μονοπάτι στο τετράγωνο. Κάθε μαθητής θα απαντούσε ότι οι δύο συντεταγμένες του, η $x \mapsto x$ και η $x \mapsto f(x)$, είναι συνεχείς. Η απάντηση αυτή είναι σωστή. Μια απεικόνιση από έναν χώρο προς το τετράγωνο είναι συνεχής ακριβώς όταν είναι συνεχείς οι δύο συντεταγμένες της. Το ίδιο ισχύει για το μονοπάτι δ και για όλες τις απεικονίσεις προς το τετράγωνο που θα συναντήσουμε.

Απεικονίσεις από το τετράγωνο. Η ομοτοπία κινείται αντίθετα. Είναι απεικόνιση $H(t,s)$ *από* το τετράγωνο, δηλαδή συνάρτηση δύο μεταβλητών, και εδώ πρέπει να προσέξουμε. Η συνέχεια της H σημαίνει συνέχεια ως προς το ζεύγος (t,s), με την απόσταση του επιπέδου. Αν ένα σημείο (t_n, s_n) πλησιάζει το (t,s) από οποιαδήποτε κατεύθυνση, πρέπει η τιμή $H(t_n, s_n)$ να πλησιάζει την $H(t,s)$. Δεν αρκεί να είναι η H συνεχής ως προς t όταν κρατάμε το s σταθερό και ως προς s όταν κρατάμε το t σταθερό.

Παράδειγμα 5.2 (Συνέχεια ως προς κάθε μεταβλητή χωριστά)**.** Ας δούμε γιατί δεν αρκεί. Θεωρούμε τη συνάρτηση $u : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$u(t,s) = \frac{ts}{t^2 + s^2} \quad \text{για } (t,s) \neq (0,0), \qquad u(0,0) = 0.$$

Αν κρατήσουμε σταθερό το $s = 0$, παίρνουμε $u(t,0) = 0$ για κάθε t, που είναι συνεχής ως προς t. Το ίδιο ισχύει για $t = 0$. Για κάθε άλλη σταθερή τιμή της μίας μεταβλητής ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται, και η u είναι πάλι συνεχής ως προς την άλλη. Πάνω στη διαγώνιο όμως, για $t = s > 0$, βρίσκουμε

$$u(t,t) = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}.$$

Τα σημεία $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ πλησιάζουν το $(0,0)$, ενώ οι τιμές $u(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$ δεν πλησιάζουν το $u(0,0) = 0$. Άρα η u δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$, αν και είναι συνεχής ως προς κάθε μεταβλητή χωριστά.

Η τοπολογία του τετραγώνου που χρησιμοποιούμε είναι λοιπόν η συνηθισμένη τοπολογία του επιπέδου, περιορισμένη στο $[0,1]\times[0,1]$.[8] Η συνέχεια ως προς τις δύο μεταβλητές μαζί είναι αυτή που μας επιτρέπει τα δύο βήματα που θα κάνουμε συχνά στη συνέχεια.

- Μια απεικόνιση όπως η $(t,s)\mapsto(1-s)\varphi(t)+st$, που σχηματίζεται από συνεχείς συναρτήσεις με πράξεις, είναι συνεχής στο τετράγωνο, και η σύνθεσή της με ένα μονοπάτι είναι συνεχής. Αυτό χρησιμοποιούμε στο Λήμμα 6.1.
- Τα ορθογώνια $[0,\frac{1}{2}]\times[0,1]$ και $[\frac{1}{2},1]\times[0,1]$ είναι κλειστά υποσύνολα του τετραγώνου, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε σε αυτά το λήμμα επικόλλησης. Αυτό χρησιμοποιούμε στις Προτάσεις 7.1 και 8.2.

Παρατήρηση 5.3. Η άσκηση του Παραδείγματος 5.1 λέει ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to[0,1]$ *έχει ένα σταθερό σημείο*, δηλαδή ένα ξ με $f(\xi)=\xi$. Είναι η μονοδιάστατη περίπτωση του θεωρήματος σταθερού σημείου του Brouwer. Η διδιάστατη περίπτωση λέει ότι κάθε συνεχής απεικόνιση του τετραγώνου στον εαυτό του έχει σταθερό σημείο. Εκεί το θεώρημα Bolzano δεν αρκεί πια, και η κλασική απόδειξη χρησιμοποιεί τη θεμελιώδη ομάδα του κύκλου, την οποία συναντάμε στην ενότητα 9.[9]

6 Η αναπαραμετροποίηση

Στην ενότητα 3 είδαμε ότι τα μονοπάτια που θέλαμε να είναι ίσα διαφέρουν μόνο στον ρυθμό με τον οποίο διανύονται. Ο ρυθμός αλλάζει αν πριν από ένα μονοπάτι σ εφαρμόσουμε μια συνεχή και μη φθίνουσα απεικόνιση $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ με $\varphi(0)=0$ και $\varphi(1)=1$. Το μονοπάτι $\sigma\circ\varphi$ λέγεται τότε **αναπαραμετροποίηση** του σ. Διατρέχει τον ίδιο δρόμο με το σ, από την ίδια αρχή στο ίδιο τέλος, με άλλο ρυθμό και ίσως με στάσεις, αλλά χωρίς να γυρίζει ποτέ πίσω. Το επόμενο λήμμα δείχνει ότι η αλλαγή του ρυθμού δεν αλλάζει την κλάση ομοτοπίας, και είναι το μόνο εργαλείο που χρειαζόμαστε για να αποκαταστήσουμε και τους δύο νόμους.

Λήμμα 6.1. *Έστω σ μονοπάτι στο X και $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ συνεχής απεικόνιση με $\varphi(0)=0$ και $\varphi(1)=1$. Τότε $\sigma\circ\varphi\sim\sigma$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$H(t,s)=\sigma\big((1-s)\,\varphi(t)+s\,t\big).$$

Ο αριθμός $(1-s)\varphi(t)+st$ ανήκει στο $[0,1]$. Πράγματι, οι αριθμοί $1-s$, s, $\varphi(t)$ και t ανήκουν στο $[0,1]$, οπότε $(1-s)\varphi(t)+st\geq 0$ και $(1-s)\varphi(t)+st\leq(1-s)+s=1$. Η H είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών απεικονίσεων, όπως είδαμε στην ενότητα 5. Για $s=0$ έχουμε $H(t,0)=\sigma(\varphi(t))$ και για $s=1$ έχουμε $H(t,1)=\sigma(t)$. Επίσης $H(0,s)=\sigma\big((1-s)\varphi(0)\big)=\sigma(0)$ και $H(1,s)=\sigma\big((1-s)\varphi(1)+s\big)=\sigma(1)$ για κάθε s. Άρα η H είναι ομοτοπία σχετικά με τα άκρα από το $\sigma\circ\varphi$ στο σ. □

Γεωμετρικά, για κάθε s το ενδιάμεσο μονοπάτι $H(\cdot,s)$ διατρέχει τον ίδιο δρόμο με το σ, με έναν ρυθμό που μεταβάλλεται συνεχώς από τον ρυθμό της φ στον αρχικό ρυθμό του σ. Στη γλώσσα των διαδρομών, το λήμμα λέει ότι αν αλλάξουμε μόνο το βήμα μας και όχι τον δρόμο, η διαδρομή μένει ουσιαστικά η ίδια.

[8] Στη γλώσσα της Τοπολογίας πρόκειται για την *τοπολογία γινομένου* στο $[0,1]\times[0,1]$, που έχει ως βάση τα σύνολα $U\times V$ με U και V ανοικτά υποσύνολα του $[0,1]$. Για το τετράγωνο συμπίπτει με την τοπολογία της ευκλείδειας απόστασης. Η ιδιότητα ότι μια απεικόνιση προς το γινόμενο είναι συνεχής ακριβώς όταν είναι συνεχείς οι συντεταγμένες της λέει ότι το τετράγωνο, μαζί με τις δύο προβολές του, είναι γινόμενο του $[0,1]$ με τον εαυτό του στην κατηγορία **Top** των τοπολογικών χώρων, με την έννοια της καθολικής ιδιότητας του κεφαλαίου 8 του βιβλίου μας.

[9] Βλ. A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002, σ. 31, Θεώρημα 1.9, όπου το θεώρημα αποδεικνύεται για τον δίσκο. Το τετράγωνο είναι ομοιομορφικό με τον δίσκο, οπότε το θεώρημα ισχύει και γι' αυτό.

Παρατήρηση 6.2. Στο Λήμμα 6.1 δεν υποθέσαμε ότι η φ είναι μη φθίνουσα, και η απόδειξη δεν χρησιμοποιεί τη μονοτονία. Αν η φ δεν είναι μονότονη, το $\sigma \circ \varphi$ δεν είναι πια απλή αλλαγή ρυθμού, γιατί κάνει πισωγυρίσματα πάνω στον δρόμο του σ. Το λήμμα λέει ότι και τότε η κλάση ομοτοπίας δεν αλλάζει, αρκεί να ισχύουν $\varphi(0) = 0$ και $\varphi(1) = 1$. Τα πισωγυρίσματα στο εσωτερικό της διαδρομής «μαζεύονται». Η διαδρομή «ως το σχολείο και πίσω» της ενότητας 1 δεν καλύπτεται από το λήμμα όπως το διατυπώσαμε. Ισχύει $\bar{\gamma} * \gamma = \gamma \circ \varphi$ με $\varphi(t) = 2t$ στο $[0, \frac{1}{2}]$ και $\varphi(t) = 2 - 2t$ στο $[\frac{1}{2}, 1]$, όμως η φ αυτή καταλήγει στο 0 και όχι στο 1. Η ιδέα της απόδειξης εφαρμόζεται και εδώ, αν μετακινήσουμε τον αριθμό $\varphi(t)$ προς το 0 αντί προς το t. Παίρνουμε έτσι την ομοτοπία $H(t, s) = \gamma\big((1 - s)\varphi(t)\big)$, που είναι ακριβώς η ομοτοπία της Πρότασης 8.2.

Με το Λήμμα 6.1 οι δύο νόμοι αποκαθίστανται, αρκεί να βρούμε κάθε φορά την κατάλληλη φ.

Πρόταση 6.3. *Έστω γ μονοπάτι από το w στο x, δ μονοπάτι από το x στο y και ε μονοπάτι από το y στο z. Τότε*

(i) $c_x * \gamma \sim \gamma$ *και* $\gamma * c_w \sim \gamma$,

(ii) $(\varepsilon * \delta) * \gamma \sim \varepsilon * (\delta * \gamma)$.

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ με

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Ισχύει $\varphi(0) = 0$ και $\varphi(1) = 1$. Για $t \le \frac{1}{2}$ έχουμε $\gamma(\varphi(t)) = \gamma(2t)$ και για $t \ge \frac{1}{2}$ έχουμε $\gamma(\varphi(t)) = \gamma(1) = x$. Αυτοί είναι ακριβώς οι δύο κλάδοι της $c_x * \gamma$, άρα $c_x * \gamma = \gamma \circ \varphi$, και από το Λήμμα 6.1 παίρνουμε $c_x * \gamma \sim \gamma$.

Για τη δεύτερη σχέση θεωρούμε τη $\psi : [0, 1] \to [0, 1]$ με

$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ 2t - 1, & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Ισχύει $\psi(0) = 0$ και $\psi(1) = 1$. Για $t \le \frac{1}{2}$ έχουμε $\gamma(\psi(t)) = \gamma(0) = w = c_w(2t)$ και για $t \ge \frac{1}{2}$ έχουμε $\gamma(\psi(t)) = \gamma(2t - 1)$. Άρα $\gamma * c_w = \gamma \circ \psi$ και $\gamma * c_w \sim \gamma$.

(ii) Θέτουμε $\sigma = \varepsilon * (\delta * \gamma)$ και θεωρούμε τη συνεχή, τμηματικά γραμμική απεικόνιση

$$\varphi(t) = \begin{cases} t/2, & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ t - \frac{1}{4}, & \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4}, \\ 2t - 1, & \frac{3}{4} \le t \le 1, \end{cases}$$

που απεικονίζει τα διαστήματα $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ και $[\frac{3}{4}, 1]$ στα $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ και $[\frac{1}{2}, 1]$ αντίστοιχα. Είναι δηλαδή η απεικόνιση που μεταφέρει την πάνω γραμμή του σχήματος της ενότητας 3 στην κάτω. Ισχύει $\varphi(0) = 0$ και $\varphi(1) = 1$, και κλάδο προς κλάδο βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \sigma(\varphi(t)) &= \gamma\big(4 \cdot \tfrac{t}{2}\big) = \gamma(2t), && t \in [0, \tfrac{1}{2}], \\ \sigma(\varphi(t)) &= \delta\big(4(t - \tfrac{1}{4}) - 1\big) = \delta(4t - 2), && t \in [\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}], \\ \sigma(\varphi(t)) &= \varepsilon\big(2(2t - 1) - 1\big) = \varepsilon(4t - 3), && t \in [\tfrac{3}{4}, 1]. \end{aligned}$$

Αυτοί είναι οι τρεις κλάδοι της $(\varepsilon * \delta) * \gamma$, άρα $(\varepsilon * \delta) * \gamma = \sigma \circ \varphi$ και από το Λήμμα 6.1 παίρνουμε $(\varepsilon * \delta) * \gamma \sim \varepsilon * (\delta * \gamma)$. □

Στο Παράδειγμα 3.2 η ομοτοπία φαίνεται και απευθείας. Επειδή ο χώρος είναι το $\mathbb{R}$, μπορούμε να ορίσουμε

$$H(t,s) = (1-s)\,\sigma_1(t) + s\,\sigma_2(t).$$

Η H είναι συνεχής, $H(\cdot,0) = \sigma_1$, $H(\cdot,1) = \sigma_2$, και $H(0,s) = 0$, $H(1,s) = 3$ για κάθε s. Στο σχήμα του παραδείγματος, τα ενδιάμεσα μονοπάτια $H(\cdot,s)$ έχουν γραφικές παραστάσεις που σαρώνουν την περιοχή ανάμεσα στις δύο τεθλασμένες γραμμές. Ο τύπος αυτός όμως χρησιμοποιεί πρόσθεση σημείων του χώρου, γι' αυτό δεν μεταφέρεται σε τυχαίο τοπολογικό χώρο. Ο γενικός δρόμος είναι το Λήμμα 6.1, που μεταβάλλει τον χρόνο και όχι τα σημεία.

Ας σημειώσουμε τι ακριβώς κερδίσαμε. Η σύνθεση $*$ έμεινε η ίδια, και άλλαξε μόνο η ισότητα που απαιτούμε. Δεν ζητάμε πια ισότητα απεικονίσεων αλλά ομοτοπία, δηλαδή μια ασθενέστερη σχέση, και ως προς αυτήν οι δύο νόμοι ισχύουν.

7 Η σύνθεση των κλάσεων

Για να γίνουν οι κλάσεις ομοτοπίας μορφισμοί μιας κατηγορίας, πρέπει να τις συνθέτουμε. Ο φυσικός ορισμός είναι

$$[\delta] \circ [\gamma] = [\delta * \gamma].$$

Ο ορισμός αυτός χρησιμοποιεί αντιπροσώπους των κλάσεων, και πρέπει να βεβαιωθούμε ότι το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από την επιλογή τους.

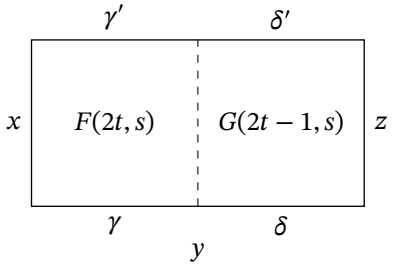
Πρόταση 7.1. *Έστω γ, γ' μονοπάτια από το x στο y και δ, δ' μονοπάτια από το y στο z. Αν $\gamma \sim \gamma'$ και $\delta \sim \delta'$, τότε $\delta * \gamma \sim \delta' * \gamma'$.*

Απόδειξη. Έστω F ομοτοπία από το γ στο γ' και G ομοτοπία από το δ στο δ'. Ορίζουμε

$$K(t,s) = \begin{cases} F(2t,s), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ G(2t-1,s), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Στο $t = \frac{1}{2}$ οι δύο κλάδοι δίνουν $F(1,s) = y$ και $G(0,s) = y$, άρα η K ορίζεται καλά, και είναι συνεχής από το λήμμα επικόλλησης στα κλειστά $[0,\frac{1}{2}] \times [0,1]$ και $[\frac{1}{2},1] \times [0,1]$. Για $s = 0$ η $K(\cdot,0)$ έχει κλάδους $\gamma(2t)$ και $\delta(2t-1)$, άρα είναι η $\delta * \gamma$. Για $s = 1$ βρίσκουμε με τον ίδιο τρόπο τη $\delta' * \gamma'$. Τέλος $K(0,s) = F(0,s) = x$ και $K(1,s) = G(1,s) = z$ για κάθε s. Άρα η K είναι ομοτοπία σχετικά με τα άκρα από το $\delta * \gamma$ στο $\delta' * \gamma'$. □

Το τετράγωνο της K αποτελείται από τα τετράγωνα των F και G τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο και συμπιεσμένα στο πλάτος ενός τετραγώνου. Στη μεταβατικότητα της $\sim$ τα δύο τετράγωνα τοποθετούνται με τον ίδιο τρόπο, αλλά το ένα πάνω στο άλλο.



8 Το θεμελιώδες ομαδοειδές

Τώρα έχουμε όλα τα υλικά για να ορίσουμε την κατηγορία που αναζητούσαμε.

Ορισμός 8.1 (Θεμελιώδες ομαδοειδές)**.** Έστω X τοπολογικός χώρος. Η κατηγορία $\Pi(X)$ έχει

- αντικείμενα τα σημεία του X,
- μορφισμούς από το x στο y τις κλάσεις ομοτοπίας των μονοπατιών από το x στο y, δηλαδή
$$\Pi(X)(x, y) = \{\, [\gamma] \mid \gamma \text{ μονοπάτι από το } x \text{ στο } y \,\},$$
- σύνθεση $[\delta] \circ [\gamma] = [\delta * \gamma]$,
- ταυτοτικό μορφισμό $\mathrm{id}_x = [c_x]$.

Η $\Pi(X)$ λέγεται **θεμελιώδες ομαδοειδές** του X.[10]

Ας ελέγξουμε ότι η $\Pi(X)$ είναι πράγματι κατηγορία. Η σύνθεση ορίζεται καλά από την Πρόταση 7.1. Ο νόμος της ταυτοτικής και η προσεταιριστικότητα προκύπτουν από την Πρόταση 6.3, αφού δύο ομοτοπικά μονοπάτια έχουν την ίδια κλάση. Για παράδειγμα,

$$\mathrm{id}_y \circ [\gamma] = [c_y] \circ [\gamma] = [c_y * \gamma] = [\gamma],$$

και

$$([\varepsilon] \circ [\delta]) \circ [\gamma] = [(\varepsilon * \delta) * \gamma] = [\varepsilon * (\delta * \gamma)] = [\varepsilon] \circ ([\delta] \circ [\gamma]).$$

Το όνομα «ομαδοειδές» οφείλεται σε μια ιδιότητα που δεν είχε η κατηγορία των μονοπατιών ενός γράφου. Κάθε μορφισμός της $\Pi(X)$ έχει αντίστροφο. Για ένα μονοπάτι γ από το x στο y ορίζουμε το **αντίστροφο μονοπάτι**

$$\bar{\gamma}(t) = \gamma(1 - t),$$

που είναι μονοπάτι από το y στο x και διατρέχει τα ίδια σημεία με αντίστροφη φορά.

Πρόταση 8.2. *Για κάθε μονοπάτι γ από το x στο y ισχύει $\bar{\gamma} * \gamma \sim c_x$ και $\gamma * \bar{\gamma} \sim c_y$. Επομένως ο μορφισμός $[\gamma] : x \to y$ είναι ισομορφισμός της $\Pi(X)$ με αντίστροφο τον $[\bar{\gamma}]$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$H(t, s) = \begin{cases} \gamma\big(2t(1 - s)\big), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \gamma\big(2(1 - t)(1 - s)\big), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Στο $t = \frac{1}{2}$ και οι δύο κλάδοι δίνουν $\gamma(1 - s)$, άρα η H ορίζεται καλά και είναι συνεχής από το λήμμα επικόλλησης. Για $s = 0$ οι κλάδοι είναι $\gamma(2t)$ και $\gamma(2 - 2t) = \bar{\gamma}(2t - 1)$, άρα $H(\cdot, 0) = \bar{\gamma} * \gamma$. Για $s = 1$ έχουμε $H(t, 1) = \gamma(0) = x$ για κάθε t, άρα $H(\cdot, 1) = c_x$. Τέλος $H(0, s) = \gamma(0) = x$ και $H(1, s) = \gamma(0) = x$ για κάθε s. Άρα $\bar{\gamma} * \gamma \sim c_x$.

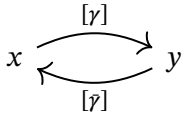
Για τη δεύτερη σχέση εφαρμόζουμε την πρώτη στο μονοπάτι $\bar{\gamma}$, που πηγαίνει από το y στο x. Επειδή το αντίστροφο του $\bar{\gamma}$ είναι το γ, παίρνουμε $\gamma * \bar{\gamma} \sim c_y$.

Σε επίπεδο κλάσεων οι δύο σχέσεις γράφονται $[\bar{\gamma}] \circ [\gamma] = \mathrm{id}_x$ και $[\gamma] \circ [\bar{\gamma}] = \mathrm{id}_y$, που είναι ακριβώς ο ορισμός του ισομορφισμού.[11] □

[10] Βλ. ενότητα 4.4 του βιβλίου μας και R. Brown, *Topology and Groupoids*, BookSurge, 2006, κεφ. 6.

[11] Βλ. ενότητα 3.6 του βιβλίου μας.

Τη στιγμή s το ενδιάμεσο μονοπάτι $H(\cdot, s)$ προχωρά κατά μήκος του γ μέχρι το σημείο $\gamma(1-s)$ και επιστρέφει από τον ίδιο δρόμο. Καθώς το s αυξάνει, το σημείο επιστροφής πλησιάζει το x, και για $s = 1$ δεν απομακρυνόμαστε καθόλου από αυτό.[12] Είναι η διαδρομή της ενότητας 1 προς το σχολείο και πίσω, που τη μαζεύουμε γυρίζοντας κάθε φορά λίγο νωρίτερα. Στο διάγραμμα οι δύο μορφισμοί είναι αντίστροφοι ο ένας του άλλου.



Ορισμός 8.3 (Ομαδοειδές)**.** Μια κατηγορία στην οποία κάθε μορφισμός είναι ισομορφισμός λέγεται **ομαδοειδές**.[13]

Από την Πρόταση 8.2, η $\Pi(X)$ είναι ομαδοειδές, και από εκεί προέρχεται το όνομά της.

Παρατήρηση 8.4. Τα αντίστροφα δεν υπάρχουν πριν από το πέρασμα στις κλάσεις. Αν το γ δεν είναι σταθερό, τότε η $\bar{\gamma} * \gamma$ δεν είναι ίση με τη c_x ως απεικόνιση, αφού κάποια στιγμή απομακρύνεται από το x. Το ίδιο ισχύει για κάθε μονοπάτι δ από το y στο x, και όχι μόνο για το $\bar{\gamma}$. Αν $\delta * \gamma = c_x$, τότε $\gamma(2t) = x$ για κάθε $t \in [0, \frac{1}{2}]$, άρα το γ είναι σταθερό. Η ομοτοπία λοιπόν δεν διορθώνει μόνο τους δύο νόμους της κατηγορίας. Μας δίνει και αντίστροφα για όλους τους μορφισμούς.

Ας συγκεντρώσουμε σε έναν πίνακα τι άλλαξε από την απόπειρα της ενότητας 3 μέχρι την κατηγορία $\Pi(X)$. Τα αντικείμενα μένουν τα ίδια. Αλλάζει μόνο το τι θεωρούμε ίδιο μορφισμό, και από αυτή την αλλαγή προκύπτουν όλες οι υπόλοιπες.

	Πριν (ενότητα 3)	**Μετά**, στη $\Pi(X)$
Αντικείμενα	σημεία του X	σημεία του X
Μορφισμοί $x \to y$	μονοπάτια γ	κλάσεις $[\gamma]$
Πότε δύο μορφισμοί ταυτίζονται	ισότητα απεικονίσεων	ομοτοπία $\sim$
Σύνθεση	$\delta * \gamma$	$[\delta] \circ [\gamma] = [\delta * \gamma]$
Ταυτοτικός	c_x	$[c_x]$
Νόμος ταυτοτικής	αποτυγχάνει (Παράδειγμα 3.1)	ισχύει (Πρόταση 6.3)
Προσεταιριστικότητα	αποτυγχάνει (Παράδειγμα 3.2)	ισχύει (Πρόταση 6.3)
Αντίστροφα	$\bar{\gamma} * \gamma \neq c_x$ για μη σταθερό γ	$[\bar{\gamma}]$ (Πρόταση 8.2)
Τι προκύπτει	δεν προκύπτει κατηγορία	ομαδοειδές

9 Η θεμελιώδης ομάδα

Σε κάθε κατηγορία, οι μορφισμοί από ένα αντικείμενο στον εαυτό του συντίθενται μεταξύ τους χωρίς περιορισμό και έχουν ουδέτερο στοιχείο τον ταυτοτικό. Σε ένα ομαδοειδές, επιπλέον, καθένας τους έχει αντίστροφο. Οι μορφισμοί αυτοί σχηματίζουν λοιπόν ομάδα.

Ας εφαρμόσουμε την παρατήρηση στην $\Pi(X)$. Σταθεροποιούμε ένα σημείο $x_0 \in X$, που το λέμε *σημείο βάσης*. Ένα μονοπάτι που αρχίζει και τελειώνει στο x_0 λέγεται **βρόχος** με βάση το x_0.

[12] Η ομοτοπία αυτή είναι η Άσκηση 4.8 του βιβλίου μας. Βλ. τις λύσεις των ασκήσεων του κεφαλαίου 4.

[13] Βλ. το σχόλιο «Γιατί κάθε μορφισμός είναι ισομορφισμός» στην ενότητα 4.4 του βιβλίου μας και Δ. Γαβαλάς, *Θέματα από τα σύγχρονα Μαθηματικά 2: Θεωρία Κατηγοριών*, Εκδόσεις 3 4 5, Αθήνα, 2006, σ. 244.

Ορισμός 9.1 (Θεμελιώδης ομάδα)**.** Η **θεμελιώδης ομάδα** του X με σημείο βάσης το x_0 είναι το σύνολο

$$\pi_1(X, x_0) = \Pi(X)(x_0, x_0)$$

των κλάσεων ομοτοπίας των βρόχων με βάση το x_0, με πράξη τη σύνθεση $[\delta] \circ [\gamma] = [\delta * \gamma]$.

Τα αξιώματα της ομάδας δεν χρειάζονται νέα απόδειξη, αφού είναι ειδικές περιπτώσεις όσων δείξαμε για την $\Pi(X)$. Η πράξη είναι κλειστή, γιατί η σύνθεση δύο βρόχων με βάση το x_0 είναι βρόχος με βάση το x_0. Είναι προσεταιριστική από την Πρόταση 6.3(ii). Ουδέτερο στοιχείο είναι η κλάση $[c_{x_0}]$ του σταθερού βρόχου, από την Πρόταση 6.3(i). Αντίστροφο της $[\gamma]$ είναι η $[\bar{\gamma}]$, από την Πρόταση 8.2.

Βλέπουμε έτσι τη θεμελιώδη ομάδα από μια νέα οπτική. Δεν είναι μια ξεχωριστή κατασκευή, αλλά ένα κομμάτι του θεμελιώδους ομαδοειδούς, οι μορφισμοί του από το x_0 στο x_0. Αντίστροφα, μια ομάδα G μπορεί να θεωρηθεί κατηγορία με ένα μόνο αντικείμενο, με μορφισμούς τα στοιχεία της G και σύνθεση την πράξη της. Η κατηγορία αυτή είναι ομαδοειδές με ένα αντικείμενο. Η έννοια του ομαδοειδούς γενικεύει λοιπόν την έννοια της ομάδας, όπως η κατηγορία γενικεύει το μονοειδές. Το ομαδοειδές $\Pi(X)$ κρατά ταυτόχρονα όλα τα σημεία βάσης και τα μονοπάτια που τα συνδέουν, ενώ η $\pi_1(X, x_0)$ βλέπει μόνο τους βρόχους γύρω από ένα σημείο.

Η θεμελιώδης ομάδα καταγράφει τους ουσιωδώς διαφορετικούς τρόπους να διατρέξουμε έναν βρόχο μέσα στον χώρο. Για το επίπεδο ισχύει $\pi_1(\mathbb{R}^2, 0) \cong \{e\}$, αφού κάθε βρόχος συρρικνώνεται συνεχώς στο σημείο βάσης. Για τον κύκλο ισχύει $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$, αφού κάθε βρόχος χαρακτηρίζεται, ως προς ομοτοπία, από το πόσες φορές και προς ποια φορά τυλίγεται γύρω από τον κύκλο.[14]

Η λίμνη της ενότητας 1 είναι μια τέτοια «τρύπα». Ας πάρουμε ως χώρο X το επίπεδο χωρίς τη λίμνη. Η διαδρομή α, που περνά βόρεια, ακολουθούμενη από την αντίστροφη της β, που περνά νότια, είναι ο βρόχος $\bar{\beta} * \alpha$ με βάση το A, που κάνει μία φορά τον γύρο της λίμνης. Επειδή η $\Pi(X)$ είναι ομαδοειδές, ισχύει $[\alpha] = [\beta]$ αν και μόνο αν $[\bar{\beta}] \circ [\alpha] = \mathrm{id}_A$, δηλαδή αν και μόνο αν ο βρόχος αυτός συρρικνώνεται στο σημείο A. Όπως στον κύκλο, ο βρόχος που κάνει τον γύρο της τρύπας δεν συρρικνώνεται. Το γεγονός αυτό το δεχόμαστε εδώ χωρίς απόδειξη, η οποία ανάγεται στον υπολογισμό της $\pi_1(S^1, 1)$ που αναφέραμε. Έτσι η διαίσθηση της ενότητας 1 ότι οι α και β είναι ουσιαστικά διαφορετικές διατυπώνεται ακριβώς. Οι δύο διαδρομές ορίζουν διαφορετικούς μορφισμούς της $\Pi(X)$ από το A στο B.

Η αλλαγή του σημείου βάσης

Η θεμελιώδης ομάδα εξαρτάται, στον ορισμό της, από ένα σημείο βάσης x_0. Ας δούμε τι συμβαίνει αν το αλλάξουμε. Η απάντηση είναι ένα γενικό γεγονός για κάθε κατηγορία, και δεν χρειάζεται τίποτα από την Τοπολογία. Σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ γράφουμε $\mathrm{Aut}(x)$ για το σύνολο των ισομορφισμών από το x στο x, που με πράξη τη σύνθεση είναι ομάδα.

Λήμμα 9.2. *Έστω $\mathcal{C}$ κατηγορία και $a : x \to y$ ισομορφισμός της. Η απεικόνιση*

$$\Phi_a : \mathrm{Aut}(x) \to \mathrm{Aut}(y), \qquad \Phi_a(g) = a \circ g \circ a^{-1},$$

είναι ισομορφισμός ομάδων.

Απόδειξη. Η $a \circ g \circ a^{-1}$ πηγαίνει από το y στο y και είναι ισομορφισμός, με αντίστροφο τον $a \circ g^{-1} \circ a^{-1}$. Για δύο στοιχεία g, h της $\mathrm{Aut}(x)$ έχουμε

$$\Phi_a(g) \circ \Phi_a(h) = a \circ g \circ a^{-1} \circ a \circ h \circ a^{-1} = a \circ (g \circ h) \circ a^{-1} = \Phi_a(g \circ h),$$

άρα η Φ_a είναι ομομορφισμός. Με τον ίδιο τρόπο ο $a^{-1} : y \to x$ δίνει ομομορφισμό $\Phi_{a^{-1}}$ με $\Phi_{a^{-1}}(k) = a^{-1} \circ k \circ a$, και οι $\Phi_a, \Phi_{a^{-1}}$ είναι αντίστροφοι ο ένας του άλλου. □

[14] Τα δύο παραδείγματα τα συναντάμε στην ενότητα 5.7 του βιβλίου μας. Η απόδειξη του δεύτερου απαιτεί περισσότερα εργαλεία από όσα αναπτύσσουμε εδώ. Βλ. A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002, §1.1.

Στο ομαδοειδές $\Pi(X)$ κάθε μορφισμός είναι ισομορφισμός, άρα $\mathrm{Aut}(x_0) = \Pi(X)(x_0, x_0) = \pi_1(X, x_0)$. Για να εφαρμόσουμε το Λήμμα 9.2 χρειαζόμαστε μόνο ένα μονοπάτι από το ένα σημείο βάσης στο άλλο.

Ορισμός 9.3 (Συνεκτικός κατά μονοπάτια χώρος)**.** Ο χώρος X λέγεται **συνεκτικός κατά μονοπάτια** αν για κάθε δύο σημεία $x, y \in X$ υπάρχει μονοπάτι από το x στο y.[15]

Με τη γλώσσα της $\Pi(X)$, ο X είναι συνεκτικός κατά μονοπάτια ακριβώς όταν κάθε δύο αντικείμενα της $\Pi(X)$ είναι ισόμορφα.

Πρόταση 9.4. *Έστω X συνεκτικός κατά μονοπάτια, $x_0, x_1 \in X$ και α μονοπάτι από το x_0 στο x_1. Η απεικόνιση*

$$\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1), \qquad [\gamma] \mapsto [\alpha] \circ [\gamma] \circ [\bar{\alpha}] = [\alpha * (\gamma * \bar{\alpha})],$$

είναι ισομορφισμός ομάδων. Επομένως η θεμελιώδης ομάδα ενός χώρου συνεκτικού κατά μονοπάτια δεν εξαρτάται, ως προς ισομορφισμό, από το σημείο βάσης.[16]

Απόδειξη. Από την Πρόταση 8.2, ο $[\alpha]$ είναι ισομορφισμός της $\Pi(X)$ με αντίστροφο τον $[\bar{\alpha}]$. Η απεικόνιση της πρότασης είναι η $\Phi_{[\alpha]}$ του Λήμματος 9.2. □

Στη γλώσσα των διαδρομών, ο βρόχος $\alpha * (\gamma * \bar{\alpha})$ με βάση το x_1 ξεκινά από το x_1, επιστρέφει από τον δρόμο $\bar{\alpha}$ στο x_0, κάνει εκεί τον βρόχο γ και ξαναγυρίζει στο x_1 από τον δρόμο α. Στο επίπεδο χωρίς τη λίμνη, που είναι συνεκτικό κατά μονοπάτια, ο βρόχος γύρω από τη λίμνη με βάση το σπίτι A μεταφέρεται έτσι σε βρόχο γύρω από τη λίμνη με βάση το σχολείο B.

Παρατήρηση 9.5. Η Πρόταση 9.4 εξηγεί γιατί είναι προτιμότερο να δουλεύουμε με το ομαδοειδές και όχι με την ομάδα.

(1) Ο ισομορφισμός εξαρτάται από την επιλογή του $[\alpha]$. Αν α' είναι άλλο μονοπάτι από το x_0 στο x_1 και $h = [\bar{\alpha}] \circ [\alpha']$, που είναι στοιχείο της $\pi_1(X, x_0)$, τότε

$$\Phi_{[\alpha']}(g) = [\alpha] \circ \big(h \circ g \circ h^{-1}\big) \circ [\bar{\alpha}] = \Phi_{[\alpha]}\big(h \circ g \circ h^{-1}\big).$$

Οι δύο ισομορφισμοί διαφέρουν λοιπόν κατά τη συζυγία με το h. Συμπίπτουν για κάθε επιλογή του α' ακριβώς όταν η $\pi_1(X, x_0)$ είναι αβελιανή. Η «θεμελιώδης ομάδα του X» χωρίς σημείο βάσης ορίζεται έτσι μόνο ως προς έναν ισομορφισμό που δεν είναι μοναδικός. Το ομαδοειδές $\Pi(X)$ δεν χρειάζεται καμία τέτοια επιλογή. Περιέχει όλα τα σημεία βάσης και, μαζί τους, όλους τους ισομορφισμούς $[\alpha]$ που τα συνδέουν.

(2) Αν ο X δεν είναι συνεκτικός κατά μονοπάτια, η $\pi_1(X, x_0)$ βλέπει μόνο τα σημεία στα οποία φτάνει κανείς από το x_0 με μονοπάτι. Η $\Pi(X)$ βλέπει ολόκληρο τον χώρο. Τα κομμάτια του X στα οποία δεν περνάμε από το ένα στο άλλο με μονοπάτι αντιστοιχούν ακριβώς στις κλάσεις ισόμορφων αντικειμένων της $\Pi(X)$.

Το επιχείρημα αυτό, ότι δεν πρέπει να δεσμευόμαστε σε ένα μόνο σημείο βάσης, αναπτύσσεται συστηματικά στο βιβλίο του Brown.[17]

[15] Ο όρος είναι αυτός της ενότητας 4.5 του βιβλίου μας. Στο σχόλιο της ενότητας 5.7 χρησιμοποιείται η απόδοση «συνεκτικός κατά δρόμους», με την ίδια σημασία. Στη βιβλιογραφία συναντάμε επίσης την απόδοση «κατά τόξα συνεκτικός» για τον αγγλικό όρο path-connected.

[16] Βλ. και το σχόλιο της ενότητας 5.7 του βιβλίου μας.

[17] R. Brown, *Topology and Groupoids*, BookSurge, 2006.

10 Οι συνεχείς απεικονίσεις

Ας κλείσουμε με μια παρατήρηση που συνδέει όσα είδαμε με την έννοια του συναρτητή. Έστω $f : X \to Y$ συνεχής απεικόνιση. Αν γ είναι μονοπάτι στο X από το x στο y, τότε η $f \circ \gamma$ είναι μονοπάτι στο Y από το $f(x)$ στο $f(y)$. Τρεις απλές ισότητες δείχνουν ότι η f σέβεται όλη τη δομή που κατασκευάσαμε.

(1) $f \circ (\delta * \gamma) = (f \circ \delta) * (f \circ \gamma)$. Πράγματι, και οι δύο πλευρές έχουν κλάδους $f(\gamma(2t))$ και $f(\delta(2t-1))$.

(2) $f \circ c_x = c_{f(x)}$, αφού και οι δύο πλευρές είναι σταθερές με τιμή $f(x)$.

(3) Αν H είναι ομοτοπία από το γ στο γ', τότε η $f \circ H$ είναι ομοτοπία από το $f \circ \gamma$ στο $f \circ \gamma'$. Άρα $\gamma \sim \gamma'$ συνεπάγεται $f \circ \gamma \sim f \circ \gamma'$.

Από την (3) η αντιστοίχιση $[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$ ορίζεται καλά στις κλάσεις, και από τις (1) και (2) σέβεται τη σύνθεση και τους ταυτοτικούς. Παίρνουμε λοιπόν έναν συναρτητή

$$\Pi(f) : \Pi(X) \to \Pi(Y), \qquad x \mapsto f(x), \qquad [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma].$$

Αν επιπλέον $f(x_0) = y_0$, ο $\Pi(f)$ αντιστοιχίζει τους βρόχους με βάση το x_0 σε βρόχους με βάση το y_0 και δίνει ομομορφισμό ομάδων

$$\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0).$$

Μένει να δούμε πώς συμπεριφέρεται η κατασκευή όταν αλλάζει η συνεχής απεικόνιση. Για συνεχείς απεικονίσεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ ισχύει $(g \circ f) \circ \gamma = g \circ (f \circ \gamma)$ για κάθε μονοπάτι γ του X, και επίσης $\mathrm{id}_X \circ \gamma = \gamma$. Άρα

$$\Pi(g \circ f) = \Pi(g) \circ \Pi(f), \qquad \Pi(\mathrm{id}_X) = \mathrm{Id}_{\Pi(X)},$$

και οι ίδιες ισότητες ισχύουν για τους ομομορφισμούς $\pi_1(f)$. Η αντιστοιχία $(X, x_0) \mapsto \pi_1(X, x_0)$, $f \mapsto \pi_1(f)$ είναι λοιπόν ο συναρτητής $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grp}$ της ενότητας 5.7 του βιβλίου μας, που μεταφράζει τοπολογικά ερωτήματα σε αλγεβρικά. Στο βιβλίο τον συναντήσαμε έτοιμο, ενώ εδώ είδαμε πώς προκύπτει από το θεμελιώδες ομαδοειδές. Με τον ίδιο τρόπο, και η αντιστοιχία $X \mapsto \Pi(X)$, $f \mapsto \Pi(f)$ είναι συναρτητής $\Pi : \mathbf{Top} \to \mathbf{Cat}$, αφού κάθε $\Pi(X)$ είναι μικρή κατηγορία.

Κλείνουμε συγκεντρώνοντας τα βήματα της κατασκευής.

- Με αντικείμενα τα σημεία ενός τοπολογικού χώρου X, μορφισμούς τα μονοπάτια και σύνθεση τη $*$, δεν παίρνουμε κατηγορία. Ο νόμος της ταυτοτικής και η προσεταιριστικότητα αποτυγχάνουν, γιατί οι απεικονίσεις $[0,1] \to X$ ξεχωρίζουν μονοπάτια που διαφέρουν μόνο στον ρυθμό.
- Δύο μονοπάτια με τα ίδια άκρα είναι ομοτοπικά σχετικά με τα άκρα αν το ένα παραμορφώνεται συνεχώς στο άλλο με σταθερά άκρα. Η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.
- Μια αναπαραμετροποίηση $\sigma \circ \varphi$ με $\varphi(0) = 0$ και $\varphi(1) = 1$ είναι ομοτοπική με το σ. Από αυτό το λήμμα προκύπτουν και οι δύο νόμοι ως προς ομοτοπία.
- Η σύνθεση $[\delta] \circ [\gamma] = [\delta * \gamma]$ ορίζεται καλά στις κλάσεις ομοτοπίας, και έτσι προκύπτει η κατηγορία $\Pi(X)$, το θεμελιώδες ομαδοειδές του X.
- Κάθε μορφισμός $[\gamma]$ της $\Pi(X)$ είναι ισομορφισμός με αντίστροφο τον $[\bar{\gamma}]$, δηλαδή η $\Pi(X)$ είναι ομαδοειδές.
- Οι μορφισμοί της $\Pi(X)$ από το x_0 στο x_0 σχηματίζουν τη θεμελιώδη ομάδα $\pi_1(X, x_0)$.

- Σε χώρο συνεκτικό κατά μονοπάτια, κάθε μονοπάτι α από το x_0 στο x_1 δίνει ισομορφισμό $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$, που όμως εξαρτάται από το α. Το ομαδοειδές $\Pi(X)$ κρατά όλα τα σημεία βάσης και δεν χρειάζεται καμία επιλογή.
- Κάθε συνεχής απεικόνιση $f : X \to Y$ δίνει συναρτητή $\Pi(f) : \Pi(X) \to \Pi(Y)$, και από αυτόν προκύπτει ο συναρτητής $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grp}$.