

Ο χάρτης του μετρό και η θεωρία κατηγοριών

Μια εισαγωγή για μη μυημένους στη θεωρία κατηγοριών

Ένας χάρτης χωρίς αποστάσεις

Ας ανοίξουμε τον χάρτη του μετρό μιας μεγάλης πόλης. Τι μας δείχνει; Δεν μας δείχνει σχεδόν τίποτα από όσα περιμένουμε από έναν συνηθισμένο χάρτη. Οι γραμμές είναι ευθείες με στρογγυλεμένες γωνίες και οι σταθμοί μοιάζουν να απέχουν ίσες αποστάσεις, ενώ στην πραγματικότητα απέχουν ένα χιλιόμετρο ή τέσσερα. Κι όμως, ο χάρτης αρκεί για να φτάσουμε οπουδήποτε. Γιατί; Επειδή κρατάει μόνο ό,τι χρειαζόμαστε, δηλαδή ποιος σταθμός συνδέεται με ποιον και πού αλλάζουμε γραμμή.

Ο χάρτης του μετρό είναι μια καλή εικόνα για τη θεωρία κατηγοριών, έναν σχετικά νέο κλάδο των μαθηματικών. Αντί να ρωτάει από τι αποτελείται ένα μαθηματικό αντικείμενο, ρωτάει πώς συνδέεται με τα υπόλοιπα. Θα δούμε στις επόμενες σελίδες τι σημαίνει αυτό, χωρίς να υποθέσουμε προηγούμενη γνωριμία με τη θεωρία κατηγοριών. Θα χρησιμοποιήσουμε λίγα σύμβολα και πολλά παραδείγματα.

Μια ιδέα του 1945

Παραδοσιακά, τα μαθηματικά ξεκινούν από το υλικό. Ένα σύνολο ορίζεται από τα στοιχεία του. Ένα ζεύγος ονόματος και χρώματος ορίζεται από τα δύο του μέλη. Ο ορισμός μοιάζει με λίστα υλικών σε μια συνταγή.

Το 1945 οι Samuel Eilenberg και Saunders Mac Lane δημοσίευσαν μια εργασία στην οποία εισήγαγαν τις κατηγορίες, τους συναρτητές και τους φυσικούς μετασχηματισμούς. Δούλευαν στην αλγεβρική τοπολογία και είχαν παρατηρήσει ότι ορισμένες κατασκευές εμφανίζονται με τρόπο «φυσικό», χωρίς όμως να υπάρχει ακριβής τρόπος να περιγραφεί αυτή η φυσικότητα. Για να τη διατυπώσουν, χρειάστηκε μια νέα γλώσσα, που έδινε σημασία στις σχέσεις ανάμεσα στα αντικείμενα και όχι στο εσωτερικό τους. Έτσι γεννήθηκε η θεωρία κατηγοριών.

Θα την παρουσιάσουμε σε τέσσερα βήματα. Θα δούμε τι είναι μια κατηγορία, πώς ορίζεται ένα αντικείμενο από τις σχέσεις του, πώς μεταφέρουμε δομή από μια κατηγορία σε άλλη και πώς συγκρίνουμε δύο τέτοιες μεταφορές.

Αντικείμενα, βέλη και σύνθεση

Μια κατηγορία έχει τρία συστατικά. Έχει αντικείμενα, έχει βέλη ανάμεσα στα αντικείμενα και έχει έναν τρόπο να συνθέτουμε βέλη. Αν υπάρχει βέλος από το A στο B και βέλος από το B στο C , τότε υπάρχει και ένα βέλος από το A στο C , που το λέμε σύνθεσή τους.

Ας δούμε τρία παραδείγματα, που δείχνουν πόσο διαφορετικά μπορούν να είναι τα πράγματα.

Στο πρώτο, τα αντικείμενα είναι πόλεις και ένα βέλος από την πόλη A στην πόλη B είναι ένα ταξίδι, πιθανόν με ενδιάμεσες στάσεις. Αν έχουμε ένα ταξίδι από την Αθήνα στο Παρίσι και ένα από το Παρίσι στη Νέα Υόρκη, η σύνθεση είναι το ταξίδι από την Αθήνα στη Νέα Υόρκη που περνά από το Παρίσι. Δεν χρειάζεται να ορίσουμε τίποτα επιπλέον.

Στο δεύτερο, τα αντικείμενα είναι σύνολα και τα βέλη είναι συναρτήσεις. Μια συνάρτηση που στέλνει κάθε όνομα στο αρχικό του γράμμα είναι ένα βέλος από το σύνολο των ονομάτων στο σύνολο των γραμμάτων. Η σύνθεση είναι η γνωστή σύνθεση συναρτήσεων.

Στο τρίτο, τα αντικείμενα είναι οι φυσικοί αριθμοί και υπάρχει βέλος από τον a στον b ακριβώς όταν ο a είναι μικρότερος ή ίσος από τον b . Εδώ ένα βέλος δεν είναι ούτε ταξίδι ούτε συνάρτηση. Είναι απλώς η πληροφορία ότι ο ένας αριθμός προηγείται του άλλου. Η σύνθεση εκφράζει την εξής προφανή ιδιότητα. Αν $a \leq b$ και $b \leq c$, τότε $a \leq c$.

Υπάρχουν και δύο κανόνες, που τους αποδεχόμαστε σε κάθε κατηγορία. Ο πρώτος λέει ότι κάθε αντικείμενο έχει ένα βέλος «που δεν κάνει τίποτα», το ταυτοτικό βέλος. Στα ταξίδια είναι η παραμονή στην ίδια πόλη. Ο δεύτερος λέει ότι όταν συνθέτουμε τρία βέλη στη σειρά, δεν έχει σημασία με ποια σειρά θα βάλουμε τις παρενθέσεις. Το ταξίδι Αθήνα, Παρίσι, Νέα Υόρκη, Σαν Φρανσίσκο είναι το ίδιο, είτε ενώσουμε πρώτα τα δύο πρώτα κομμάτια είτε τα δύο τελευταία.

Ας προσέξουμε τι δεν ζητάμε. Δεν ζητάμε να ξέρουμε τι είναι ένα αντικείμενο μέσα του. Στο τρίτο παράδειγμα ο αριθμός 7 δεν είναι παρά ένα σημείο, και ό,τι ξέρουμε γι' αυτόν το ξέρουμε από τα βέλη που φτάνουν σε αυτόν και φεύγουν από αυτόν.

Το ίδιο ως προς τη δομή

Πότε δύο αντικείμενα είναι «ίδια» για μια κατηγορία; Δεν είναι όταν είναι ακριβώς το ίδιο πράγμα, αλλά όταν συμπεριφέρονται ακριβώς το ίδιο ως προς τα βέλη. Το κριτήριο είναι ο ισομορφισμός. Ένα βέλος από το A στο B λέγεται ισομορφισμός, αν υπάρχει βέλος προς την αντίθετη κατεύθυνση που ακυρώνει την επίδρασή του, και στις δύο κατευθύνσεις.

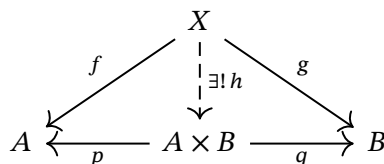
Στην κατηγορία των συνόλων ένας ισομορφισμός είναι μια αντιστοιχία ένα προς ένα. Το σύνολο των ημερών {Δευτέρα, Τρίτη, Τετάρτη} και το σύνολο {1, 2, 3} είναι ισόμορφα. Τα στοιχεία είναι διαφορετικά, ο τρόπος που οργανώνονται είναι ο ίδιος. Το ίδιο συμβαίνει με δύο χάρτες του μετρό που σχεδιάστηκαν με διαφορετικά χρώματα, αρκεί να έχουν τους ίδιους σταθμούς και τις ίδιες συνδέσεις.

Αυτό έχει μια συνέπεια που θα τη συναντήσουμε ξανά. Στη θεωρία κατηγοριών, όταν ένα αντικείμενο προσδιορίζεται από μια καθολική ιδιότητα, η μοναδικότητα που εξασφαλίζει η ιδιότητα αυτή είναι μοναδικότητα ως προς ισομορφισμό. Δύο αντικείμενα που ικανοποιούν την ίδια καθολική ιδιότητα είναι ισόμορφα.

Το γινόμενο, χωρίς να το ανοίξουμε

Ας δούμε πώς δουλεύει η νέα ματιά πάνω σε ένα γνωστό αντικείμενο. Έστω ότι έχουμε το σύνολο A των ονομάτων και το σύνολο B των χρωμάτων. Το καρτεσιανό γινόμενο, που το γράφουμε $A \times B$, είναι το σύνολο όλων των ζευγών (όνομα, χρώμα). Αυτός είναι ο παραδοσιακός ορισμός. Λέει από τι αποτελείται το γινόμενο.

Υπάρχουν δύο προφανή βέλη, οι προβολές. Η μία παίρνει ένα ζεύγος και επιστρέφει το όνομα, η άλλη επιστρέφει το χρώμα. Τώρα ας φανταστούμε μια τάξη μαθητών. Κάθε μαθητής έχει ένα όνομα και ένα αγαπημένο χρώμα. Με άλλα λόγια, έχουμε ένα βέλος από το σύνολο των μαθητών προς το A και ένα βέλος προς το B . Υπάρχει τότε ακριβώς ένας τρόπος να πάρουμε από κάθε μαθητή το ζεύγος του, ώστε οι προβολές να επιστρέφουν πίσω το όνομα και το χρώμα του.



Το σχήμα το λέει με βέλη. Ό,τι έχει ένα βέλος f προς το A και ένα βέλος g προς το B περνά με έναν και μοναδικό τρόπο μέσα από το $A \times B$. Και τώρα έρχεται η αλλαγή οπτικής. Μπορούμε να ξεχάσουμε ότι το $A \times B$ αποτελείται από ζεύγη. Το γινόμενο είναι το αντικείμενο που έχει αυτή την ιδιότητα. Τους ορισμούς αυτού του είδους τους λέμε *καθολικές ιδιότητες*.

Ο ορισμός δουλεύει και σε κατηγορίες όπου τα αντικείμενα δεν είναι σύνολα. Ας πάρουμε τους θετικούς ακεραίους και ας βάλουμε ένα βέλος από τον a στον b όταν ο a διαιρεί τον b . Τι σημαίνει εδώ ο ορισμός του γινομένου δύο αριθμών a και b ; Ζητάμε έναν αριθμό d με βέλη προς τα a και b , δηλαδή έναν κοινό διαιρέτη τους, με την εξής ιδιότητα. Κάθε άλλος αριθμός x με βέλη προς τα a και b , δηλαδή κάθε άλλος κοινός διαιρέτης, έχει ένα βέλος προς το d , δηλαδή διαιρεί το d . Ο αριθμός αυτός είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των a και b . Το γινόμενο, λοιπόν, δεν μοιάζει καθόλου με πολλαπλασιασμό, και παρ' όλα αυτά προκύπτει από τον ίδιο ορισμό.

Υπάρχει και κάτι ακόμη. Το γινόμενο είναι μοναδικό ως προς ισομορφισμό, όπως κάθε αντικείμενο που ορίζεται από την ίδια καθολική ιδιότητα. Το σύνολο των ζευγών (χρώμα, όνομα) είναι διαφορετικό σύνολο από το σύνολο των ζευγών (όνομα, χρώμα), και παρ' όλα αυτά είναι εξίσου καλό γινόμενο. Η θεωρία κατηγοριών δεν το θεωρεί πρόβλημα. Το θεωρεί φυσικό.

Συναρτητές

Ας περάσουμε τώρα από τα αντικείμενα μέσα σε μια κατηγορία στις κατηγορίες μεταξύ τους. Πώς μεταφέρουμε μια δομή από τη μία κατηγορία στην άλλη χωρίς να χαθεί; Η απάντηση είναι ο *συναρτητής*. Ένας συναρτητής στέλνει κάθε αντικείμενο της πρώτης κατηγορίας σε ένα αντικείμενο της δεύτερης και κάθε βέλος σε ένα βέλος, με δύο όρους. Η σύνθεση πρέπει να διατηρείται και τα ταυτοτικά βέλη πρέπει να πηγαίνουν σε ταυτοτικά βέλη.

Ένα παράδειγμα που το γνωρίζουν καλά όσοι προγραμματίζουν είναι οι λίστες. Σε κάθε σύνολο A αντιστοιχούμε το σύνολο όλων των λιστών με στοιχεία από το A . Σε κάθε συνάρτηση f από το A στο B αντιστοιχούμε τη συνάρτηση που εφαρμόζει την f σε όλα τα στοιχεία μιας λίστας. Αν η f μετατρέπει ονόματα σε αρχικά γράμματα, τότε η νέα συνάρτηση μετατρέπει μια λίστα ονομάτων σε μια λίστα αρχικών. Οι δύο όροι ισχύουν αυτόματα. Αν μετατρέψουμε ονόματα σε αρχικά και μετά τα αρχικά σε κάτι άλλο, το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με το να κάνουμε τη σύνθεση πρώτα. Αν η συνάρτηση δεν αλλάζει τίποτα, δεν αλλάζει τίποτα και η λίστα.

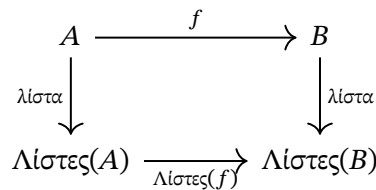
Ένα δεύτερο παράδειγμα προέρχεται από την τοπολογία. Κάθε χώρος με ένα επιλεγμένο σημείο αντιστοιχεί στη θεμελιώδη ομάδα του, ενώ κάθε συνεχής απεικόνιση που διατηρεί το επιλεγμένο σημείο μετατρέπεται σε ομομορφισμό ομάδων. Ο συναρτητής μεταφέρει έτσι ένα πρόβλημα γεωμετρίας σε ένα πρόβλημα άλγεβρας, και συχνά το δεύτερο είναι πιο εύκολο.

Αν θέλουμε μια εικόνα, ο συναρτητής μοιάζει με το σχέδιο ενός σπιτιού. Δεν αντιγράφει τα τούβλα. Κρατάει το πώς συνδέονται τα δωμάτια και το πώς κινούμαστε από το ένα στο άλλο. Μεταφέρει τη δομή και αφήνει πίσω το υλικό.

Φυσικοί μετασχηματισμοί

Τι γίνεται όμως όταν έχουμε δύο συναρτητές ανάμεσα στις ίδιες κατηγορίες, δηλαδή δύο διαφορετικούς τρόπους να μεταφέρουμε την ίδια δομή; Πώς συγκρίνουμε τους δύο τρόπους; Η απάντηση είναι ο φυσικός μετασχηματισμός, και είναι ακριβώς η έννοια που ήθελαν να ορίσουν το 1945 οι Eilenberg και Mac Lane.

Ας πάρουμε τον συναρτητή των λιστών και τον συναρτητή που δεν κάνει τίποτα. Σε κάθε στοιχείο a ενός συνόλου αντιστοιχούμε τη λίστα με ένα μόνο στοιχείο, το a . Η αντιστοιχία αυτή έχει μια ιδιότητα που τη θεωρούμε αυτονόητη. Αν πρώτα μετατρέψουμε το στοιχείο με μια συνάρτηση και μετά το βάλουμε σε λίστα, παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα με το να το βάλουμε πρώτα σε λίστα και να μετατρέψουμε τη λίστα.



Το σχήμα λέει ότι οι δύο διαδρομές φέρνουν στο ίδιο σημείο. Όποτε ισχύει κάτι τέτοιο για κάθε συνάρτηση f , λέμε ότι ο μετασχηματισμός είναι φυσικός. Η αντιστροφή μιας λίστας είναι και αυτή φυσική, γιατί δεν έχει σημασία αν θα αντιστρέψουμε πρώτα και θα μετατρέψουμε μετά ή το αντίστροφο. Έχουμε λοιπόν δύο συναρτητές, έναν που αφήνει τα σύνολα και τις συναρτήσεις όπως είναι και έναν που τα μετατρέπει σε λίστες. Ο φυσικός μετασχηματισμός συνδέει τις δύο κατασκευές με τρόπο συμβατό με κάθε συνάρτηση. Το ότι οι δύο αυτές πράξεις δεν εξαρτώνται από το είδος των στοιχείων είναι ακριβώς αυτό που εννοούμε, όταν λέμε ότι είναι «φυσικές». Έτσι η διαίσθηση αποκτά στη θεωρία κατηγοριών έναν ακριβή ορισμό, με τον οποίο μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένας μετασχηματισμός είναι φυσικός.

Το λήμμα του Yoneda

Ας γυρίσουμε στην ιδέα του χάρτη του μετρό. Είπαμε ότι ένα αντικείμενο καθορίζεται από τις σχέσεις του. Υπάρχει ένα θεώρημα που το λέει με ακρίβεια και που φέρει το όνομα του Nobuo Yoneda. Μια συνέπειά του λέει τα εξής. Αν δύο αντικείμενα δέχονται βέλη από κάθε άλλο αντικείμενο με τον ίδιο τρόπο, και οι αντίστοιχες αντιστοιχίες είναι συμβατές με τη σύνθεση των βελών, τότε τα δύο αντικείμενα είναι ισόμορφα.

Με άλλα λόγια, αν ξέρουμε πώς σχετίζονται με ένα αντικείμενο όλα τα άλλα, τότε ξέρουμε το αντικείμενο, ως προς ισομορφισμό. Δεν χρειάζεται να το ανοίξουμε. Δεν μένει τίποτα μέσα του που να μην φαίνεται από έξω.

Αυτό εξηγεί και γιατί οι ορισμοί με καθολικές ιδιότητες, όπως του γινομένου, είναι τόσο ισχυροί. Δεν είναι ένας ακόμη τρόπος να περιγράψουμε το γινόμενο. Είναι ο τρόπος που το προσδιορίζει πλήρως.

Γιατί αξίζει τον κόπο

Θα μπορούσε κανείς να αναρωτηθεί τι κερδίζουμε από όλα αυτά. Το γινόμενο, οι λίστες και οι διατάξεις υπήρχαν και πριν από το 1945. Το κέρδος είναι ότι τώρα τα βλέπουμε ως μία και την ίδια ιδέα. Το γινόμενο συνόλων, ο μέγιστος κοινός διαιρέτης και η τομή δύο υποσυνόλων ενός δεδομένου συνόλου μπορούν να περιγραφούν με την ίδια καθολική ιδιότητα, σε κατάλληλες κατηγορίες. Οι γλώσσες

συναρτησιακού προγραμματισμού, όπως η Haskell, χρησιμοποιούν τη λέξη «συναρτητής» (functor) για κάτι που οι προγραμματιστές κάνουν καθημερινά, όπως η εφαρμογή μιας συνάρτησης σε όλα τα στοιχεία μιας λίστας. Η θεωρία δεν φτιάχτηκε γι' αυτούς, ταίριαξε όμως στις ανάγκες τους.

Ας κλείσουμε με το μετρό. Ο χάρτης δεν είναι ψεύτικος επειδή παραλείπει τις αποστάσεις. Είναι αληθινός ως προς ό,τι τον ενδιαφέρει. Η θεωρία κατηγοριών κάνει κάτι ανάλογο στα μαθηματικά. Αντί να εστιάζει στο από τι αποτελούνται τα αντικείμενα, εξετάζει πώς συνδέονται μεταξύ τους και τι μπορούμε να μάθουμε γι' αυτά από αυτές τις σχέσεις. Με αυτόν τον τρόπο, διαφορετικά μαθηματικά αντικείμενα μπορούν να αποκαλύψουν μια κοινή δομή.

Για όσους θέλουν να προχωρήσουν, τις ίδιες έννοιες με πλήρεις ορισμούς και αποδείξεις παρουσιάζει το βιβλίο «Εισαγωγή στη Θεωρία Κατηγοριών» των εκδόσεων ΔΙΑΥΛΟΣ.