

Μονοειδή και το ελεύθερο μονοειδές

Από την Άλγεβρα στη Θεωρία Κατηγοριών

Σημειώσεις που συνοδεύουν το βιβλίο «Εισαγωγή στη Θεωρία Κατηγοριών» των εκδόσεων ΔΙΑΥΛΟΣ.

Σεπτέμβριος 2026

Το μονοειδές είναι μια από τις πιο απλές αλγεβρικές δομές. Ένα σύνολο, μια προσεταιριστική πράξη και ένα ουδέτερο στοιχείο, τίποτα περισσότερο. Δεν ζητάμε αντιστροφή, δεν ζητάμε αντιμεταθετικότητα. Και όμως, μέσα από αυτή την απλή δομή φαίνονται καθαρά τρεις βασικές ιδέες της Θεωρίας Κατηγοριών. Ένα μονοειδές είναι κατηγορία με ένα μόνο αντικείμενο. Η δομή μιας κατηγορίας βρίσκεται στα βέλη και στη σύνθεσή τους, όχι μέσα στα αντικείμενα. Το ελεύθερο μονοειδές, το μονοειδές των λέξεων, είναι το πιο απλό παράδειγμα ελεύθερης κατασκευής. Στο τέλος θα δούμε ότι πίσω από αυτή την κατασκευή βρίσκεται μια από τις κεντρικές έννοιες της Θεωρίας Κατηγοριών, η προσάρτηση.

Τι προϋποθέτουμε. Από την Άλγεβρα χρειαζόμαστε την έννοια της ομάδας και του ομομορφισμού ομάδων, όπως τις συζητήσαμε στις σημειώσεις μας «Ομομορφισμοί ομάδων και δακτυλίων». Από τη Θεωρία Κατηγοριών χρειαζόμαστε τις έννοιες της κατηγορίας, του ισομορφισμού και του συναρτητή, όπως τις παρουσιάζουμε στο βιβλίο μας «Εισαγωγή στη Θεωρία Κατηγοριών», στα κεφάλαια 3 και 5. Την έννοια της προσάρτησης, από το κεφάλαιο 13, τη χρησιμοποιούμε ουσιαστικά μόνο στην ενότητα 7. Σε κάθε σημείο του κειμένου όπου χρησιμοποιούμε μια κατηγορική έννοια παραπέμπουμε στην αντίστοιχη ενότητα του βιβλίου.

1 Τι είναι μονοειδές

Ας ξεκινήσουμε από μερικά γνωστά παραδείγματα. Στους φυσικούς αριθμούς $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ η πρόσθεση είναι προσεταιριστική και το 0 δεν αλλάζει κανέναν αριθμό, αφού $0 + n = n + 0 = n$. Στους ίδιους αριθμούς ο πολλαπλασιασμός είναι επίσης προσεταιριστικός, και τον ρόλο του 0 τον παίζει τώρα το 1. Στους τετραγωνικούς πίνακες $n \times n$ ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός και ο μοναδιαίος πίνακας I_n δεν αλλάζει κανέναν πίνακα. Σε όλα αυτά τα παραδείγματα έχουμε μια πράξη που είναι προσεταιριστική και ένα στοιχείο που είναι ουδέτερο για την πράξη. Αυτό ακριβώς είναι το μονοειδές.

Ορισμός 1.1. Μονοειδές (monoid) είναι μια τριάδα $(M, \star, e)$, όπου M είναι ένα σύνολο, $\star : M \times M \rightarrow M$ μια πράξη και $e \in M$ ένα στοιχείο, τέτοια ώστε

(i) $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$ για κάθε $a, b, c \in M$ (προσεταιριστικότητα),

(ii) $e \star a = a \star e = a$ για κάθε $a \in M$ (ουδέτερο στοιχείο).

Συχνά γράφουμε ab αντί για $a \star b$, και όταν η πράξη και το ουδέτερο στοιχείο εννοούνται από τα συμφραζόμενα λέμε απλώς «το μονοειδές M ». Λόγω της προσεταιριστικότητας, ένα γινόμενο $m_1 m_2 \cdots m_k$ έχει νόημα χωρίς παρενθέσεις, όπως ακριβώς στις ομάδες. Το «κενό γινόμενο», δηλαδή το γινόμενο με $k = 0$ παράγοντες, το ορίζουμε ίσο με e .

Ας σημειώσουμε ότι ένα μονοειδές έχει ένα μόνο ουδέτερο στοιχείο. Αν e και e' είναι και τα δύο ουδέτερα, τότε

$$e = e \star e' = e'.$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει επειδή το e' είναι ουδέτερο, η δεύτερη επειδή το e είναι ουδέτερο. Γι' αυτό μιλάμε για το ουδέτερο στοιχείο.

Κάθε ομάδα είναι μονοειδής. Η ομάδα είναι ακριβώς ένα μονοειδές στο οποίο κάθε στοιχείο έχει αντίστροφο. Το μονοειδές είναι λοιπόν μια ασθενέστερη δομή από την ομάδα, και γι' αυτό συναντάται πολύ πιο συχνά.

Παράδειγμα 1.2. Τα παρακάτω είναι μονοειδή.

- i. $(\mathbb{N}, +, 0)$ και $(\mathbb{Z}, +, 0)$. Το δεύτερο είναι και ομάδα, το πρώτο όχι.
- ii. $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$ και $(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$.
- iii. $(M_n(\mathbb{R}), \cdot, I_n)$, οι πραγματικοί πίνακες $n \times n$ με τον πολλαπλασιασμό πινάκων.
- iv. Για ένα σύνολο X , το σύνολο $\text{End}(X) = \{f \mid f : X \rightarrow X\}$ των ενδομορφισμών του X , δηλαδή όλων των συναρτήσεων από το X στον εαυτό του, με πράξη τη σύνθεση $\circ$ και ουδέτερο στοιχείο την ταυτοτική id_X .
- v. Οι συμβολοσειρές πάνω σε ένα αλφάβητο, με πράξη την παράθεση και ουδέτερο στοιχείο την κενή συμβολοσειρά. Σε αυτό το παράδειγμα θα επανέλθουμε αναλυτικά στην ενότητα 6.

Στα (i) και (ii) η πράξη είναι αντιμεταθετική. Στα (iii), (iv) και (v) γενικά δεν είναι, εκτός από τις τετριμμένες περιπτώσεις, όπου $n = 1$, ή το X έχει το πολύ ένα στοιχείο, ή το αλφάβητο έχει ένα μόνο γράμμα. Για παράδειγμα, στο (iv) με $X = \mathbb{R}$, αν $f(x) = x + 1$ και $g(x) = 2x$, τότε $(g \circ f)(x) = 2x + 2$ ενώ $(f \circ g)(x) = 2x + 1$.

Ας δούμε πιο συγκεκριμένα το παράδειγμα (iv). Στο $\text{End}(X)$ τα στοιχεία του μονοειδούς είναι συναρτήσεις και η πράξη είναι η σύνθεση. Θα μπορούσε κανείς να το θεωρήσει απλώς ένα παράδειγμα ανάμεσα σε πολλά. Στην πραγματικότητα όμως κάθε μονοειδές είναι, ως προς ισομορφισμό, ένα μονοειδές συναρτήσεων με πράξη τη σύνθεση. Θα το αποδείξουμε στο τέλος της επόμενης ενότητας, αφού ορίσουμε τους ομομορφισμούς μονοειδών.

Ας δούμε και τι δεν είναι μονοειδές. Τα αντιπαράδειγματα φανερώσουν τι ακριβώς ζητάει ο ορισμός.

Παράδειγμα 1.3. (α') Η αφαίρεση δεν είναι καν πράξη στο $\mathbb{N}$, αφού $3 - 5 \notin \mathbb{N}$. Άρα το ερώτημα αν το $(\mathbb{N}, -)$ είναι μονοειδές δεν τίθεται καν.

(β') Στο $\mathbb{Z}$ η αφαίρεση είναι πράξη, αλλά δεν είναι προσεταιριστική, αφού

$$(5 - 3) - 1 = 1 \neq 3 = 5 - (3 - 1).$$

Επιπλέον δεν έχει ουδέτερο στοιχείο. Αν το u ήταν ουδέτερο, η σχέση $a - u = a$ θα έδινε $u = 0$. Όμως το 0 δουλεύει μόνο από δεξιά, αφού $0 - a = -a \neq a$ όταν $a \neq 0$.

(γ') Στο σύνολο $\mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$ η πρόσθεση είναι πράξη και είναι προσεταιριστική, αλλά δεν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο. Μια δομή με προσεταιριστική πράξη, στην οποία δεν απαιτούμε ουδέτερο στοιχείο, λέγεται ημιομάδα (semigroup). Κάθε μονοειδές είναι ημιομάδα, ενώ το $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, +)$ είναι ημιομάδα που δεν είναι μονοειδές.

2 Ομομορφισμοί μονοειδών

Όπως στις ομάδες, μας ενδιαφέρουν οι απεικονίσεις που σέβονται τη δομή.

Ορισμός 2.1. Έστω $(M, \star, e)$ και $(N, \diamond, e')$ δύο μονοειδή. Ομομορφισμός μονοειδών είναι μια απεικόνιση $\varphi : M \rightarrow N$ τέτοια ώστε

- (i) $\varphi(a \star b) = \varphi(a) \diamond \varphi(b)$ για κάθε $a, b \in M$,

(ii) $\varphi(e) = e'$.

Στις ομάδες δεν απαιτούμε τη συνθήκη (ii), γιατί προκύπτει από την (i). Πράγματι, αν $\varphi : G \rightarrow H$ είναι ομομορφισμός ομάδων, τότε από την (i) έχουμε

$$\varphi(e) = \varphi(e \star e) = \varphi(e) \diamond \varphi(e).$$

Επειδή το H είναι ομάδα, το $\varphi(e)$ έχει αντίστροφο $\varphi(e)^{-1}$. Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με αυτό και χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα παίρνουμε

$$e' = \varphi(e)^{-1} \diamond \varphi(e) = \varphi(e)^{-1} \diamond (\varphi(e) \diamond \varphi(e)) = (\varphi(e)^{-1} \diamond \varphi(e)) \diamond \varphi(e) = e' \diamond \varphi(e) = \varphi(e).$$

Στα μονοειδή όμως δεν έχουμε αντίστροφα, οπότε η (ii) δεν προκύπτει από την (i) και πρέπει να την απαιτούμε. Το επόμενο παράδειγμα το δείχνει.

Παράδειγμα 2.2. Θεωρούμε την απεικόνιση $\varphi : (\mathbb{Z}, \cdot, 1) \rightarrow (\mathbb{Z}, \cdot, 1)$ με $\varphi(x) = 0$ για κάθε x . Τότε

$$\varphi(xy) = 0 = 0 \cdot 0 = \varphi(x)\varphi(y),$$

δηλαδή η (i) ισχύει. Όμως $\varphi(1) = 0 \neq 1$, άρα η φ δεν είναι ομομορφισμός μονοειδών.

Παράδειγμα 2.3. i. Η απεικόνιση $\varphi : (\mathbb{N}, +, 0) \rightarrow (\mathbb{N}, \cdot, 1)$ με $\varphi(n) = 2^n$ είναι ομομορφισμός μονοειδών, αφού $2^{m+n} = 2^m \cdot 2^n$ και $2^0 = 1$. Μετατρέπει την πρόσθεση σε πολλαπλασιασμό.

ii. Η ορίζουσα $\det : (M_n(\mathbb{R}), \cdot, I_n) \rightarrow (\mathbb{R}, \cdot, 1)$ είναι ομομορφισμός μονοειδών, αφού $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ και $\det I_n = 1$.

iii. Η απεικόνιση που στέλνει κάθε συμβολοσειρά στο μήκος της είναι ομομορφισμός από το μονοειδές των συμβολοσειρών στο $(\mathbb{N}, +, 0)$. Το μήκος μιας παράθεσης είναι το άθροισμα των μηκών, και η κενή συμβολοσειρά έχει μήκος 0.

Η σύνθεση δύο ομομορφισμών μονοειδών είναι ομομορφισμός μονοειδών, και η ταυτοτική απεικόνιση ενός μονοειδούς είναι ομομορφισμός. Ο έλεγχος είναι ο ίδιος με αυτόν που κάνουμε στις ομάδες. Έχουμε λοιπόν την κατηγορία **Mon**, με αντικείμενα τα μονοειδή και μορφισμούς τους ομομορφισμούς μονοειδών. Ο επιλέσμων συναρτητής $U : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Set}$ «ξεχνά» την πράξη και το ουδέτερο στοιχείο. Στέλνει κάθε μονοειδές στο υποκείμενο σύνολό του και κάθε ομομορφισμό στην ίδια απεικόνιση, θεωρημένη απλώς ως συνάρτηση.¹

Με τους ομομορφισμούς στη διάθεσή μας μπορούμε τώρα να αποδείξουμε αυτό που υποσχθήκαμε στην ενότητα 1. Λέμε ότι ένα υποσύνολο N ενός μονοειδούς M είναι υπομονοειδές αν περιέχει το ουδέτερο στοιχείο και είναι κλειστό ως προς την πράξη.

Πρόταση 2.4 (Θεώρημα του Cayley για μονοειδή). Κάθε μονοειδές $(M, \star, e)$ είναι ισόμορφο με ένα υπομονοειδές του $\text{End}(M)$, δηλαδή του μονοειδούς των ενδομορφισμών του υποκείμενου συνόλου του M , με πράξη τη σύνθεση και ουδέτερο στοιχείο την ταυτοτική.²

Απόδειξη. Η ιδέα είναι να δούμε κάθε στοιχείο m ως τη συνάρτηση που πολλαπλασιάζει από αριστερά με το m . Για κάθε $m \in M$ ορίζουμε $\lambda_m : M \rightarrow M$ με $\lambda_m(x) = m \star x$, και την απεικόνιση $\lambda : M \rightarrow \text{End}(M)$, $m \mapsto \lambda_m$.

Ο λ είναι ομομορφισμός μονοειδών. Από την προσεταιριστικότητα,

$$\lambda_{m \star n}(x) = (m \star n) \star x = m \star (n \star x) = (\lambda_m \circ \lambda_n)(x),$$

¹Βλ. ενότητα 5.3 του βιβλίου μας για τους επιλέσμονες συναρτητές.

²Βλ. Θεώρημα 1.1 στο E. Rivas, M. Jaskelioff, Notions of computation as monoids, *Journal of Functional Programming*, 27, e21, 2017, doi:10.1017/S0956796817000132, όπου η πρόταση διατυπώνεται και αποδεικνύεται με την ίδια ιδέα.

άρα $\lambda_{m \star n} = \lambda_m \circ \lambda_n$. Από την ιδιότητα του ουδετέρου, $\lambda_e(x) = e \star x = x$, άρα $\lambda_e = \text{id}_M$.

Ο λ είναι ένα προς ένα. Ορίζουμε την απεικόνιση $\rho : \text{End}(M) \rightarrow M$ με $\rho(k) = k(e)$, που υπολογίζει κάθε συνάρτηση στο ουδέτερο στοιχείο. Τότε

$$\rho(\lambda_m) = \lambda_m(e) = m \star e = m,$$

δηλαδή $\rho \circ \lambda = \text{id}_M$. Αν λοιπόν $\lambda_m = \lambda_n$, τότε $m = \rho(\lambda_m) = \rho(\lambda_n) = n$.

Συμπέρασμα. Η εικόνα $\{\lambda_m \mid m \in M\}$ περιέχει την $\text{id}_M = \lambda_e$ και είναι κλειστή ως προς τη σύνθεση, αφού $\lambda_m \circ \lambda_n = \lambda_{m \star n}$. Είναι επομένως υπομονοειδές του $\text{End}(M)$. Ο λ δίνει αμφίρριψη από το M στην εικόνα του, και η αντίστροφή της είναι ο περιορισμός του ρ . Ο περιορισμός αυτός διατηρεί την πράξη, γιατί $\rho(\lambda_m \circ \lambda_n) = \rho(\lambda_{m \star n}) = m \star n = \rho(\lambda_m) \star \rho(\lambda_n)$, και διατηρεί το ουδέτερο, γιατί $\rho(\text{id}_M) = e$. Άρα ο λ είναι ισομορφισμός του M με την εικόνα του. $\square$

Ας προσέξουμε τι ακριβώς είναι οι συναρτήσεις λ_m . Είναι ενδομορφισμοί του συνόλου M και όχι, γενικά, ομομορφισμοί του μονοειδούς M στον εαυτό του. Στο $(\mathbb{N}, +, 0)$, για παράδειγμα, έχουμε $\lambda_1(x + y) = x + y + 1$, ενώ $\lambda_1(x) + \lambda_1(y) = x + y + 2$. Επίσης $\lambda_1(0) = 1 \neq 0$. Αυτό δεν πρέπει να μας προβληματίζει, αφού ο λ_m στέλνει το ουδέτερο στο m . Αυτό που σέβεται την πράξη είναι η απεικόνιση $m \mapsto \lambda_m$, όχι οι ίδιες οι λ_m .

Για παράδειγμα, στο $(\mathbb{N}, +, 0)$ το m αντιστοιχεί στη συνάρτηση $x \mapsto m + x$, δηλαδή στη μετατόπιση κατά m . Η πρόσθεση αριθμών γίνεται σύνθεση μετατοπίσεων. Τη μετατόπιση κατά 1, τη συνάρτηση λ_1 , θα τη συναντήσουμε ξανά στην ενότητα 4. Η πρόταση είναι το ανάλογο του γνωστού θεωρήματος του Cayley για τις ομάδες, σύμφωνα με το οποίο κάθε ομάδα είναι ισόμορφη με μια ομάδα μεταθέσεων.³

3 Το μονοειδές ως κατηγορία

Ερχόμαστε τώρα στην πρώτη μεγάλη ιδέα. Στην ενότητα 3.3 του βιβλίου μας είδαμε ότι μια κατηγορία με ένα μόνο αντικείμενο είναι ουσιαστικά ένα μονοειδές.⁴ Ας δούμε την κατασκευή αναλυτικά, και προς τις δύο κατευθύνσεις.

Ορισμός 3.1. Έστω $(M, \star, e)$ ένα μονοειδές. Ορίζουμε την κατηγορία **BM** ως εξής.

- Έχει ένα μόνο αντικείμενο, που το συμβολίζουμε $*$.
- Οι μορφισμοί $* \rightarrow *$ είναι τα στοιχεία του M , δηλαδή $\mathbf{BM}(*, *) = M$.
- Η σύνθεση είναι η πράξη του μονοειδούς, $g \circ f = g \star f$.
- Ο ταυτοτικός μορφισμός είναι το ουδέτερο στοιχείο, $\text{id}_* = e$.

Αφού υπάρχει ένα μόνο αντικείμενο, κάθε μορφισμός έχει πηγή και στόχο το $*$, και επομένως κάθε δύο μορφισμοί συντίθενται. Τα αξιώματα της κατηγορίας ισχύουν αμέσως. Η προσεταιριστικότητα της σύνθεσης,

$$(h \circ g) \circ f = (h \star g) \star f = h \star (g \star f) = h \circ (g \circ f),$$

είναι η προσεταιριστικότητα του μονοειδούς. Οι νόμοι της ταυτότητας,

$$\text{id}_* \circ f = e \star f = f, \quad f \circ \text{id}_* = f \star e = f,$$

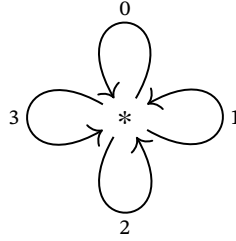
είναι η ιδιότητα του ουδετέρου στοιχείου. Είναι απλό.

³Βλ. Θεώρημα 3.12 (Cayley, 1878) του J. J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, 4η έκδοση, Springer, 1995.

⁴Βλ. ενότητα 3.3 και Παράδειγμα 3.5 του βιβλίου μας.

Παρατήρηση 3.2. Στον ορισμό επιλέξαμε $g \circ f = g \star f$. Θα μπορούσαμε να είχαμε επιλέξει $g \circ f = f \star g$, και τότε θα παίρναμε πάλι κατηγορία με ένα αντικείμενο. Η δεύτερη επιλογή δίνει την κατηγορία του αντίθετου μονοειδούς M^{op} , που έχει το ίδιο σύνολο με το M και πράξη $a \star^{\text{op}} b = b \star a$. Όταν το M είναι αντιμεταθετικό, οι δύο επιλογές συμπίπτουν. Σε όλο το κείμενο κρατάμε τη σύμβαση $g \circ f = g \star f$.⁵

Παράδειγμα 3.3. Για το μονοειδές $(\mathbb{N}, +, 0)$ η κατηγορία $\mathbf{BN}$ έχει ένα αντικείμενο $*$ και μορφισμούς $0, 1, 2, 3, \dots : * \rightarrow *$.



Το σχήμα δείχνει μόνο τέσσερα από τα άπειρα βέλη. Η σύνθεση είναι πρόσθεση, για παράδειγμα $3 \circ 2 = 5$, και ο ταυτοτικός μορφισμός είναι το 0.

Ας σταθούμε λίγο σε αυτό το παράδειγμα. Το βέλος $5 : * \rightarrow *$ δεν είναι συνάρτηση. Δεν παίρνει κάποιο στοιχείο του $*$ για να το στείλει κάπου, γιατί το $*$ δεν είναι σύνολο του οποίου τα στοιχεία μετακινούνται. Είναι απλώς ένα σημείο. Το 5 είναι απλώς ένα βέλος, με συγκεκριμένη θέση μέσα στο σύστημα των συνθέσεων. Θα επανέλθουμε σε αυτή την παρατήρηση στην ενότητα 5.

Η αντίστροφη κατεύθυνση. Έστω τώρα μια κατηγορία $\mathcal{C}$ με ένα μόνο αντικείμενο $*$. Τότε το σύνολο $\mathcal{C}(*, *)$, με πράξη τη σύνθεση και ουδέτερο στοιχείο το id_* , είναι μονοειδές. Η σύνθεση ορίζεται για κάθε ζεύγος μορφισμών, είναι προσεταιριστική, και ο id_* είναι ουδέτερος. Τα αξιώματα της κατηγορίας γίνονται τα αξιώματα του μονοειδούς. Οι δύο κατασκευές είναι η μία αντίστροφη της άλλης, με τη μόνη επιφύλαξη ότι το όνομα του μοναδικού αντικειμένου δεν παίζει κανέναν ρόλο. Μονοειδή και κατηγορίες με ένα αντικείμενο είναι, ουσιαστικά, το ίδιο πράγμα.

Η ίδια παρατήρηση ισχύει και μέσα σε μια κατηγορία με πολλά αντικείμενα. Για κάθε αντικείμενο A μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$, το $\mathcal{C}(A, A)$ με τη σύνθεση είναι μονοειδές.⁶ Για $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ και $A = X$ παίρνουμε ακριβώς το μονοειδές $\text{End}(X)$ του Παραδείγματος 1.2(iv).

Ομομορφισμοί και συναρτητές. Αφού τα μονοειδή είναι κατηγορίες, μπορούμε να ρωτήσουμε τι είναι ένας συναρτητής ανάμεσά τους. Η απάντηση είναι η αναμενόμενη.

Πρόταση 3.4. Έστω M και N δύο μονοειδή. Οι συναρτητές $F : \mathbf{BM} \rightarrow \mathbf{BN}$ αντιστοιχούν αμφιμονοσήμαντα στους ομομορφισμούς μονοειδών $\varphi : M \rightarrow N$.

Απόδειξη. Ένας συναρτητής $F : \mathbf{BM} \rightarrow \mathbf{BN}$ πρέπει να στείλει το μοναδικό αντικείμενο της $\mathbf{BM}$ στο μοναδικό αντικείμενο της $\mathbf{BN}$. Εδώ δεν έχουμε καμία επιλογή. Όλη η πληροφορία βρίσκεται λοιπόν στο πώς δρα ο F στους μορφισμούς, δηλαδή σε μια απεικόνιση $\varphi : M \rightarrow N$. Οι δύο συνθήκες του ορισμού του συναρτητή⁷ γράφονται

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \iff \varphi(g \star f) = \varphi(g) \diamond \varphi(f), \quad F(\text{id}_*) = \text{id}_* \iff \varphi(e) = e'.$$

Αυτές είναι ακριβώς οι συνθήκες (i) και (ii) του Ορισμού 2.1. □

Βλέπουμε εδώ και μια δεύτερη εξήγηση για τη συνθήκη (ii). Οι συναρτητές στέλνουν πάντα ταυτοτικούς μορφισμούς σε ταυτοτικούς. Αν θέλουμε οι ομομορφισμοί μονοειδών να είναι ακριβώς οι συναρτητές, πρέπει να στέλνουν το ουδέτερο στοιχείο στο ουδέτερο. Η μηδενική απεικόνιση του Παραδείγματος 2.2 διατηρεί τη σύνθεση, αλλά δεν είναι συναρτητής.

⁵Βλ. Άσκηση 3.14 του βιβλίου μας, για τη σχέση της αντίθετης κατηγορίας του $\mathbf{BM}$ με το M^{op} , και ενότητα 3.7 για την αντίθετη κατηγορία.

⁶Βλ. το σχόλιο «Το $\mathcal{C}(A, A)$ ως μονοειδές» στην ενότητα 3.5 του βιβλίου μας.

⁷Βλ. ενότητα 5.2 του βιβλίου μας.

4 Ισομορφισμοί και αντιστρέψιμα στοιχεία

Σε μια κατηγορία, ένας μορφισμός $f : A \rightarrow B$ είναι *ισομορφισμός* αν υπάρχει μορφισμός $g : B \rightarrow A$ με $g \circ f = \text{id}_A$ και $f \circ g = \text{id}_B$.⁸ Τι σημαίνει αυτό στην κατηγορία $\mathbf{BM}$; Ένας μορφισμός $m : * \rightarrow *$ είναι *ισομορφισμός* αν υπάρχει $n \in M$ με

$$n \star m = e \quad \text{και} \quad m \star n = e.$$

Αυτό σημαίνει ακριβώς ότι το m έχει (αμφίπλευρο) αντίστροφο στο μονοειδές. Λέμε τότε ότι το m είναι *αντιστρέψιμο*. Επομένως

οι *ισομορφισμοί της $\mathbf{BM}$ είναι ακριβώς τα αντιστρέψιμα στοιχεία του M .*

Το αντίστροφο, όταν υπάρχει, είναι μοναδικό. Αν n και n' είναι και τα δύο αντίστροφα του m , τότε

$$n = n \star e = n \star (m \star n') = (n \star m) \star n' = e \star n' = n'.$$

Ας προσέξουμε ότι στον υπολογισμό χρησιμοποιήσαμε μόνο ότι το n είναι αντίστροφο από αριστερά και το n' από δεξιά. Θα το χρειαστούμε αυτό σε λίγο.

Παράδειγμα 4.1. (α') Στο $(\mathbb{N}, +, 0)$, το m είναι αντιστρέψιμο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $m + n = 0$. Αφού $m, n \geq 0$, αυτό συμβαίνει μόνο για $m = n = 0$. Ο μόνος ισομορφισμός της $\mathbf{BN}$ είναι ο ταυτοτικός.

(β') Στο $(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$, το m είναι αντιστρέψιμο αν υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ με $mn = 1$. Αυτό συμβαίνει μόνο για $m = 1$ και $m = -1$, που είναι το καθένα αντίστροφο του εαυτού του.

(γ') Στο $(M_n(\mathbb{R}), \cdot, I_n)$, ένας πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\det A \neq 0$. Για παράδειγμα ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ δεν είναι ισομορφισμός της $\mathbf{BM}_2(\mathbb{R})$, αν και δεν είναι ο μηδενικός.

(δ') Στο $(\text{End}(X), \circ, \text{id}_X)$, τα αντιστρέψιμα στοιχεία είναι οι αμφιρρήψεις $X \rightarrow X$.

Τα αντιστρέψιμα στοιχεία ενός μονοειδούς M σχηματίζουν ομάδα, την *ομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων του M* . Πράγματι, το e είναι αντιστρέψιμο, το αντίστροφο ενός αντιστρέψιμου είναι αντιστρέψιμο, και αν τα m, m' είναι αντιστρέψιμα, τότε και το mm' είναι, με αντίστροφο το $m'^{-1}m^{-1}$. Στα παραπάνω παραδείγματα παίρνουμε την τετριμμένη ομάδα $\{0\}$, την ομάδα $\{1, -1\}$, την ομάδα των αντιστρέψιμων πινάκων και την ομάδα των μεταθέσεων του X .

Όταν όλα τα στοιχεία είναι αντιστρέψιμα, το μονοειδές είναι ομάδα και η κατηγορία του έχει όλους τους μορφισμούς της ισομορφισμούς.

Βασική ιδέα

Ένα μονοειδές είναι κατηγορία με ένα αντικείμενο. Μια ομάδα είναι κατηγορία με ένα αντικείμενο στην οποία κάθε μορφισμός είναι ισομορφισμός.

⁸Βλ. ενότητα 3.6 του βιβλίου μας.

Προσοχή

Σε ένα μονοειδές δεν αρκεί ένα στοιχείο να έχει αντίστροφο από τη μία μόνο πλευρά. Ας δούμε ένα παράδειγμα στο $\text{End}(\mathbb{N})$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$s(n) = n + 1, \quad p(n) = \begin{cases} n - 1, & n \geq 1, \\ 0, & n = 0. \end{cases}$$

Τότε $p(s(n)) = n$ για κάθε n , δηλαδή $p \circ s = \text{id}_{\mathbb{N}}$. Όμως $s(p(0)) = s(0) = 1 \neq 0$, άρα $s \circ p \neq \text{id}_{\mathbb{N}}$. Η s έχει αριστερό αντίστροφο, αλλά δεν είναι ισομορφισμός. Δεν είναι επί, αφού το 0 δεν είναι τιμή της. Μάλιστα η s έχει άπειρα αριστερά αντίστροφα, αφού μπορούμε να ορίσουμε την τιμή $p(0)$ όπως θέλουμε.

Η απόδειξη της μοναδικότητας του αντιστρόφου δείχνει τι γίνεται όταν υπάρχουν αντίστροφα και από τις δύο πλευρές. Αν $n \star m = e$ και $m \star n' = e$, τότε $n = n'$ και το m είναι αντιστρέψιμο. Το πρόβλημα εμφανίζεται μόνο όταν έχουμε αντίστροφο από τη μία πλευρά. Στους τετραγωνικούς πίνακες όμως αρκεί η μία πλευρά. Αν $BA = I_n$, τότε η γραμμική απεικόνιση $x \mapsto Ax$ του $\mathbb{R}^n$ είναι ένα προς ένα, αφού $Ax = 0$ δίνει $x = BAx = 0$. Από το θεώρημα διάστασης, μια γραμμική απεικόνιση του $\mathbb{R}^n$ στον εαυτό του που είναι ένα προς ένα είναι και επί, άρα ο A είναι αντιστρέψιμος, και από την προηγούμενη παρατήρηση $B = A^{-1}$. Η διαφορά οφείλεται στην πεπερασμένη διάσταση του $\mathbb{R}^n$. Κάτι ανάλογο ισχύει και για το $\text{End}(X)$ όταν το X είναι πεπερασμένο σύνολο, αφού τότε μια συνάρτηση $X \rightarrow X$ που είναι ένα προς ένα είναι και επί. Στο άπειρο σύνολο $\mathbb{N}$ αυτό αποτυγχάνει, όπως είδαμε με τη μετατόπιση s .

5 Η δομή βρίσκεται στις σχέσεις

Όταν συναντάμε για πρώτη φορά την έννοια της κατηγορίας, η εικόνα που σχηματίζουμε είναι συνήθως αυτή της **Set**. Τα αντικείμενα είναι σύνολα, οι μορφισμοί είναι συναρτήσεις, και η σύνθεση είναι η σύνθεση συναρτήσεων. Η εικόνα αυτή είναι χρήσιμη, αλλά είναι μόνο ένα παράδειγμα, όχι ο ορισμός. Ο ορισμός της κατηγορίας δεν λέει πουθενά ότι τα αντικείμενα έχουν στοιχεία, ούτε ότι οι μορφισμοί είναι συναρτήσεις, ούτε ότι τα αντικείμενα είναι πολλά. Ζητάει μόνο αντικείμενα, μορφισμούς με πηγή και στόχο, μια προσεταιριστική σύνθεση και ταυτοτικούς μορφισμούς.⁹

Η κατηγορία $\mathbf{BN}$ του Παραδείγματος 3.3 δείχνει πόσο λίγα χρειάζονται. Το $*$ είναι απλώς ένα σημείο, δεν χρησιμοποιούμε κανένα στοιχείο του, άρα δεν «περιέχει» καμία πληροφορία. Οι μορφισμοί είναι αριθμοί, όχι συναρτήσεις, και η σύνθεση είναι πρόσθεση. Και όμως όλη η δομή του $(\mathbb{N}, +, 0)$ βρίσκεται εκεί, κωδικοποιημένη στις σχέσεις ανάμεσα στα βέλη, όπως $3 \circ 2 = 5$ και $0 \circ n = n$.

Ακόμη και στο μονοειδές $\text{End}(X)$, όπου οι μορφισμοί είναι συναρτήσεις, το αντικείμενο της $\mathbf{B}(\text{End}(X))$ είναι το $*$ και όχι το σύνολο X . Η κατηγορία δεν «ξέρει» ότι οι μορφισμοί της δρουν πάνω σε κάποιο σύνολο. Ξέρει μόνο πώς συντίθενται.

Τα μονοειδή δεν είναι η μόνη γνωστή δομή που γίνεται κατηγορία. Ας συγκεντρώσουμε μερικά παραδείγματα από το βιβλίο.

⁹Βλ. ενότητα 3.1 του βιβλίου μας.

Δομή	Ως κατηγορία
Μονοειδές	ένα αντικείμενο
Ομάδα	ένα αντικείμενο, κάθε μορφισμός ισομορφισμός
Προ-διατεταγμένο σύνολο	για κάθε ζεύγος αντικειμένων a, b , ακόμη και για $a = b$, το πολύ ένας μορφισμός $a \rightarrow b$
Μερικώς διατεταγμένο σύνολο	όπως το προηγούμενο, και αν υπάρχουν μορφισμοί $a \rightarrow b$ και $b \rightarrow a$, τότε $a = b$
Σύνολο (διακριτή κατηγορία)	μόνο οι ταυτοτικοί μορφισμοί

Στο βιβλίο μας τα μερικώς διατεταγμένα σύνολα συζητούνται στην ενότητα 3.4, η διακριτή κατηγορία στην ενότητα 3.3 και τα προ-διατεταγμένα σύνολα στο Παράδειγμα 3.10. Ας προσέξουμε τη διαφορά των δύο μεσαίων γραμμών. Η συνθήκη «το πολύ ένας μορφισμός» δεν αρκεί για μερική διάταξη. Χρειάζεται και η αντισυμμετρία.¹⁰

Από το μονοειδές στην κατηγορία με πολλά αντικείμενα. Ας γυρίσουμε στους πίνακες. Το μονοειδές $M_n(\mathbb{R})$ περιέχει μόνο τετραγωνικούς πίνακες μιας συγκεκριμένης διάστασης n . Τι γίνεται όμως με το γινόμενο ενός πίνακα 4×2 επί έναν πίνακα 2×3 ; Το γινόμενο ορίζεται, αλλά οι πίνακες αυτοί δεν ανήκουν σε κανένα από τα μονοειδή $M_n(\mathbb{R})$. Η κατηγορία $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$ του βιβλίου λύνει ακριβώς αυτό το πρόβλημα.¹¹ Τα αντικείμενά της είναι οι φυσικοί αριθμοί, και ένας μορφισμός $m \rightarrow n$ είναι ένας πίνακας $n \times m$. Η σύνθεση είναι ο πολλαπλασιασμός πινάκων, και ο ταυτοτικός μορφισμός του n είναι ο I_n .

Για παράδειγμα, ένας πίνακας A τύπου 2×3 είναι μορφισμός $3 \rightarrow 2$, και ένας πίνακας B τύπου 4×2 είναι μορφισμός $2 \rightarrow 4$. Η σύνθεση $B \circ A = BA$ είναι πίνακας 4×3 , δηλαδή μορφισμός $3 \rightarrow 4$.

$$3 \xrightarrow{A} 2 \xrightarrow{B} 4$$

$\searrow \quad \nearrow$
 BA

Η σύνθεση $A \circ B$ δεν ορίζεται, αφού ο στόχος 4 του B δεν είναι η πηγή 3 του A . Αυτό αντιστοιχεί στο γνωστό γεγονός ότι το γινόμενο AB δεν ορίζεται, αφού ο A έχει 3 στήλες και ο B έχει 4 γραμμές.

Μέσα σε αυτή την κατηγορία το μονοειδές μας εμφανίζεται ως εξής. Οι μορφισμοί $n \rightarrow n$ είναι οι πίνακες $n \times n$, άρα $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}(n, n) = M_n(\mathbb{R})$. Το μονοειδές είναι το σύνολο των μορφισμών από ένα αντικείμενο στον εαυτό του. Μια κατηγορία μπορεί λοιπόν να ιδωθεί ως ένα «μονοειδές με πολλά αντικείμενα», στο οποίο η πράξη ορίζεται μόνο όταν ο στόχος του ενός μορφισμού είναι η πηγή του άλλου.

Διαισθητική εικόνα

Η δομή δεν βρίσκεται μέσα στα αντικείμενα αλλά στις σχέσεις ανάμεσά τους. Αυτό εννοούμε με τον υπότιτλο του βιβλίου μας, «Από τα αντικείμενα στις σχέσεις».

6 Το ελεύθερο μονοειδές

Ερχόμαστε στη δεύτερη μεγάλη ιδέα. Ας ξεκινήσουμε από ένα σύνολο A , που θα το λέμε *αλφάβητο* και τα στοιχεία του *γράμματα*. Μια λέξη πάνω στο A είναι μια πεπερασμένη ακολουθία γραμμάτων

$$a_1 a_2 \cdots a_k, \quad a_1, \dots, a_k \in A, \quad k \geq 0.$$

¹⁰Βλ. Άσκηση 3.8 του βιβλίου μας, για μια προ-διάταξη που δεν είναι μερική διάταξη.

¹¹Βλ. ενότητα 4.1 και Παράδειγμα 4.1 του βιβλίου μας.

Ο αριθμός k είναι το μήκος της λέξης. Για $k = 0$ έχουμε την κενή λέξη, που τη συμβολίζουμε ε . Δύο λέξεις είναι ίσες όταν έχουν το ίδιο μήκος και τα ίδια γράμματα στις ίδιες θέσεις.

Ορισμός 6.1. Το ελεύθερο μονοειδές πάνω στο σύνολο A είναι το σύνολο A^* όλων των λέξεων πάνω στο A , με πράξη την παράθεση

$$(a_1 \cdots a_k) \star (b_1 \cdots b_l) = a_1 \cdots a_k b_1 \cdots b_l$$

και ουδέτερο στοιχείο την κενή λέξη ε .

Για παράδειγμα, αν $A = \{a, b\}$, τότε

$$A^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \dots\}$$

και $ab \star ba = abba$.¹² Το A^* είναι πράγματι μονοειδές. Και τα δύο μέλη της $(u \star v) \star w = u \star (v \star w)$ είναι η λέξη που γράφουμε όταν βάζουμε τα γράμματα της u , μετά της v , μετά της w , στη σειρά. Η παράθεση με την κενή λέξη δεν αλλάζει τίποτα. Όταν το A έχει τουλάχιστον δύο γράμματα, η πράξη δεν είναι αντιμεταθετική, αφού $ab \neq ba$.

Παράδειγμα 6.2. Αν το αλφάβητο έχει ένα μόνο γράμμα, $A = \{a\}$, τότε

$$A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \dots\}.$$

Μια λέξη καθορίζεται πλήρως από το μήκος της, και η παράθεση προσθέτει μήκη. Η απεικόνιση που στέλνει τη λέξη $a \cdots a$ με n γράμματα στο n είναι ισομορφισμός μονοειδών $A^* \cong (\mathbb{N}, +, 0)$. Το μονοειδές των φυσικών αριθμών με την πρόσθεση είναι λοιπόν το ελεύθερο μονοειδές πάνω σε ένα γράμμα.¹³

Γιατί το λέμε ελεύθερο; Γιατί στο A^* δεν ισχύει καμία ισότητα πέρα από όσες επιβάλλουν τα αξιώματα του μονοειδούς. Σε ένα τυχόν μονοειδές μπορεί να ισχύει, για παράδειγμα, $ab = ba$ ή $aa = e$. Στο A^* δύο λέξεις είναι ίσες μόνο αν είναι γράμμα προς γράμμα ίδιες. Τα γράμματα είναι «ελεύθερα» από κάθε επιπλέον σχέση. Η ιδέα αυτή διατυπώνεται με ακρίβεια μέσω μιας καθολικής ιδιότητας.

Η εμφύτευση των γραμμάτων. Ένα γράμμα $a \in A$ και η λέξη a , με μήκος 1, είναι αυστηρά μιλώντας διαφορετικά αντικείμενα. Το πρώτο είναι στοιχείο του A , το δεύτερο στοιχείο του A^* . Η σύνδεσή τους γίνεται με τη συνάρτηση

$$\eta_A : A \rightarrow U(A^*), \quad a \mapsto \text{η λέξη } a.$$

Γράφουμε $U(A^*)$ και όχι A^* , γιατί η η_A είναι απλώς συνάρτηση ανάμεσα σε σύνολα. Το A δεν είναι μονοειδές, άρα δεν έχει νόημα να ρωτήσουμε αν η η_A σέβεται κάποια πράξη. Θα δούμε στην ενότητα 7 ότι η η_A είναι η μονάδα μιας προσάρτησης.

Θεώρημα 6.3 (Καθολική ιδιότητα του ελεύθερου μονοειδούς). Έστω A ένα σύνολο, $(M, \star, e)$ ένα μονοειδές και $\varphi : A \rightarrow U(M)$ μια συνάρτηση. Τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός μονοειδών $\bar{\varphi} : A^* \rightarrow M$ τέτοιος ώστε

$$U(\bar{\varphi}) \circ \eta_A = \varphi,$$

δηλαδή τέτοιος ώστε $\bar{\varphi}(a) = \varphi(a)$ για κάθε γράμμα $a \in A$. Με διάγραμμα,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & U(A^*) \\ & \searrow \varphi & \downarrow U(\bar{\varphi}) \\ & & U(M) \end{array}$$

¹²Βλ. Παράδειγμα 5.6 του βιβλίου μας, όπου το A^* εμφανίζεται για πρώτη φορά.

¹³Βλ. Άσκηση 13.4 του βιβλίου μας.

Η διακεκομμένη γραμμή στο διάγραμμα δηλώνει, κατά τα γνωστά, ότι ο ομομορφισμός $\bar{\varphi}$ προκύπτει από τα υπόλοιπα δεδομένα και είναι ο μοναδικός ομομορφισμός $\psi : A^* \rightarrow M$ με $U(\psi) \circ \eta_A = \varphi$. Ας προσέξουμε ότι η μοναδικότητα αφορά τους ομομορφισμούς. Συναρτήσεις $U(A^*) \rightarrow U(M)$ που κάνουν το τρίγωνο αντιμεταθετικό υπάρχουν πολλές. Με λόγια, κάθε απόδοση τιμών στα γράμματα επεκτείνεται με μοναδικό τρόπο σε ομομορφισμό από όλο το A^* .

Απόδειξη. Ξεκινάμε από τη μοναδικότητα, γιατί αυτή μας δείχνει και πώς πρέπει να ορίσουμε τον $\bar{\varphi}$. Ας υποθέσουμε ότι ο $\bar{\varphi}$ είναι ομομορφισμός με $\bar{\varphi}(a) = \varphi(a)$ για κάθε γράμμα a . Κάθε μη κενή λέξη είναι γινόμενο των γραμμάτων της στο A^* , $a_1 a_2 \cdots a_k = a_1 \star a_2 \cdots a_k$. Αφού ο $\bar{\varphi}$ διατηρεί τα γινόμενα,

$$\bar{\varphi}(a_1 a_2 \cdots a_k) = \bar{\varphi}(a_1) \bar{\varphi}(a_2) \cdots \bar{\varphi}(a_k) = \varphi(a_1) \varphi(a_2) \cdots \varphi(a_k),$$

και αφού διατηρεί το ουδέτερο στοιχείο, $\bar{\varphi}(e) = e$. Οι τιμές του $\bar{\varphi}$ είναι λοιπόν αναγκαστικά αυτές. Δεν έχουμε καμία ελευθερία επιλογής.

Για την ύπαρξη, ορίζουμε τον $\bar{\varphi}$ ακριβώς με αυτούς τους τύπους,

$$\bar{\varphi}(a_1 a_2 \cdots a_k) = \varphi(a_1) \varphi(a_2) \cdots \varphi(a_k), \quad \bar{\varphi}(e) = e.$$

Ο ορισμός είναι καλός, γιατί μια λέξη καθορίζει μονοσήμαντα τα γράμματά της και τη σειρά τους, και γιατί το γινόμενο στο M έχει νόημα χωρίς παρενθέσεις. Ο $\bar{\varphi}$ διατηρεί το ουδέτερο στοιχείο εξ ορισμού. Για δύο λέξεις $u = a_1 \cdots a_k$ και $v = b_1 \cdots b_l$ έχουμε

$$\bar{\varphi}(u \star v) = \bar{\varphi}(a_1 \cdots a_k b_1 \cdots b_l) = \varphi(a_1) \cdots \varphi(a_k) \varphi(b_1) \cdots \varphi(b_l) = \bar{\varphi}(u) \bar{\varphi}(v).$$

Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την προσεταιριστικότητα του M . Ο ίδιος υπολογισμός ισχύει και όταν η u ή η v είναι κενή, αφού τότε ο αντίστοιχος παράγοντας είναι το e . Τέλος, για λέξη ενός γράμματος ο τύπος δίνει $\bar{\varphi}(a) = \varphi(a)$. $\square$

Ας προσέξουμε τι ακριβώς χρησιμοποιήσαμε για το M . Μόνο ότι είναι μονοειδές. Δεν χρειάστηκε ούτε αντιμεταθετικότητα ούτε αντίστροφα. Αυτό είναι το νόημα της λέξης «ελεύθερο». Το A^* μπορεί να απεικονιστεί σε οποιοδήποτε μονοειδές, με όποιον τρόπο θέλουμε για τα γράμματα, ακριβώς επειδή δεν ικανοποιεί καμία επιπλέον σχέση που θα έπρεπε να διατηρηθεί.

Παράδειγμα 6.4. Έστω $A = \{a, b\}$, $M = (\mathbb{N}, +, 0)$ και $\varphi(a) = 1$, $\varphi(b) = 2$. Η πράξη του M είναι η πρόσθεση, οπότε ο $\bar{\varphi}$ προσθέτει τις τιμές των γραμμάτων. Για παράδειγμα,

$$\bar{\varphi}(ab) = 1 + 2 = 3, \quad \bar{\varphi}(aabba) = 1 + 1 + 2 + 2 + 1 = 7.$$

Αν συμβολίσουμε με $|w|_a$ και $|w|_b$ το πλήθος των a και των b στη λέξη w , τότε

$$\bar{\varphi}(w) = |w|_a + 2|w|_b.$$

Ας προσέξουμε ότι $\bar{\varphi}(ab) = \bar{\varphi}(ba) = 3$, αν και $ab \neq ba$ στο A^* . Ο $\bar{\varphi}$ «ξεχνά» τη σειρά των γραμμάτων, επειδή η πρόσθεση στο $\mathbb{N}$ είναι αντιμεταθετική. Ο ομομορφισμός $\bar{\varphi}$ δεν είναι ένα προς ένα. Μια γενική λέξη του A^* δεν έχει τη μορφή $a^m b^n$, όπως δείχνει η $aabba$, αλλά η τιμή της μέσω του $\bar{\varphi}$ εξαρτάται μόνο από το πόσα γράμματα κάθε είδους περιέχει.

Παράδειγμα 6.5. Με το ίδιο $M = (\mathbb{N}, +, 0)$ και $\varphi(a) = 1$ για κάθε γράμμα $a \in A$, ο $\bar{\varphi}$ μετράει ένα για κάθε γράμμα. Είναι ο ομομορφισμός μήκους $A^* \rightarrow \mathbb{N}$ του Παραδείγματος 2.3(iii). Η καθολική ιδιότητα μας εξηγεί γιατί είναι ομομορφισμός, χωρίς κανέναν υπολογισμό.

Παράδειγμα 6.6. Όταν το M δεν είναι αντιμεταθετικό, ο $\bar{\varphi}$ κρατάει τη σειρά των γραμμάτων. Έστω $A = \{a, b\}$, $M = (M_2(\mathbb{R}), \cdot, I_2)$ και

$$\varphi(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Τότε

$$\bar{\varphi}(ab) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\varphi}(ba) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Κάθε λέξη μεταφράζεται σε ένα γινόμενο πινάκων, με τη σειρά που ορίζουν τα γράμματά της. Η κενή λέξη μεταφράζεται στον I_2 .

Παράδειγμα 6.7. Στο Παράδειγμα 5.6 του βιβλίου μας, μια συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ επεκτείνεται σε ομομορφισμό $\hat{f} : A^* \rightarrow B^*$, που αντικαθιστά κάθε γράμμα με την εικόνα του. Ο $\hat{f}$ είναι ο ομομορφισμός που δίνει το Θεώρημα 6.3 για το μονοειδές $M = B^*$ και τη συνάρτηση $\varphi = \eta_B \circ f : A \rightarrow U(B^*)$, που στέλνει το γράμμα a στη λέξη ενός γράμματος $f(a)$.

Παρατήρηση 6.8. Η καθολική ιδιότητα ισχύει για κάθε μονοειδές M και κάθε συνάρτηση φ . Δεν χρειάζεται τα $\varphi(a)$ να «παράγουν» το M . Τι γίνεται όμως όταν τα παράγουν, δηλαδή όταν κάθε στοιχείο του M είναι γινόμενο στοιχείων της μορφής $\varphi(a)$; Τότε ο $\bar{\varphi}$ είναι επί, αφού το γινόμενο $\varphi(a_1) \cdots \varphi(a_k)$ είναι η εικόνα της λέξης $a_1 \cdots a_k$. Αυτό συμβαίνει πάντα, αν πάρουμε ως αλφάβητο το ίδιο το σύνολο $U(M)$ και ως φ την ταυτοτική. Ο αντίστοιχος ομομορφισμός $U(M)^* \rightarrow M$ παίρνει μια λέξη από στοιχεία του M και υπολογίζει το γινόμενό τους στο M .¹⁴ Επομένως κάθε μονοειδές είναι εικόνα ενός ελεύθερου μονοειδούς μέσω κάποιου ομομορφισμού. Τα ελεύθερα μονοειδή είναι, κατά κάποιον τρόπο, η πρώτη ύλη από την οποία φτιάχνονται όλα τα άλλα.

7 Ο ελεύθερος συναρτητής

Ας δούμε τώρα την καθολική ιδιότητα από πιο ψηλά. Στο Παράδειγμα 5.6 του βιβλίου μας η αντιστοίχιση $A \mapsto A^*$, $f \mapsto \hat{f}$ ορίζει συναρτητή

$$F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Mon}, \quad F(A) = A^*, \quad F(f) = \hat{f},$$

τον ελεύθερο συναρτητή.¹⁵ Πάει προς την αντίθετη κατεύθυνση από τον επιλήσμονα $U : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Set}$. Ο U ξεχνά τη δομή, ο F φτιάχνει δομή από ένα γυμνό σύνολο με τον πιο «οικονομικό» τρόπο.

Το Θεώρημα 6.3 λέει ότι η απεικόνιση

$$\mathbf{Mon}(A^*, M) \longrightarrow \mathbf{Set}(A, U(M)), \quad \psi \longmapsto U(\psi) \circ \eta_A,$$

είναι αμφίρριψη. Πράγματι, για κάθε φ στο δεξιό μέλος υπάρχει μοναδικό ψ στο αριστερό με $U(\psi) \circ \eta_A = \varphi$, το $\psi = \bar{\varphi}$. Δηλαδή ένας ομομορφισμός από το ελεύθερο μονοειδές είναι το ίδιο πράγμα με μια συνάρτηση από τα γράμματα,

$$\mathbf{Mon}(F(A), M) \cong \mathbf{Set}(A, U(M)).$$

Η αμφίρριψη αυτή είναι επιπλέον φυσική ως προς A και ως προς M . Αυτό ακριβώς σημαίνει ότι ο F είναι αριστερά προσαρτημένος στον U , και γράφουμε $F \dashv U$.¹⁶ Η συνάρτηση η_A είναι η μονάδα της προσάρτησης.¹⁷

Όταν $A = \{a\}$ έχει ένα μόνο γράμμα, το Παράδειγμα 6.2 δίνει $F(\{a\}) \cong \mathbb{N}$, και η αμφίρριψη γίνεται

$$\mathbf{Mon}(\mathbb{N}, M) \cong U(M).$$

Ένας ομομορφισμός $\mathbb{N} \rightarrow M$ καθορίζεται από ένα μόνο στοιχείο του M , την εικόνα του 1. Αν η εικόνα του 1 είναι το m , τότε η εικόνα του n είναι αναγκαστικά το $m^n = m \cdots m$, με n παράγοντες. Το Παράδειγμα 2.3(i) είναι η περίπτωση $M = (\mathbb{N}, \cdot, 1)$ και $m = 2$.

¹⁴Στο βιβλίο μας ο ομομορφισμός αυτός είναι η συν-μονάδα της προσάρτησης $F \dashv U$, βλ. Άσκηση 13.15.

¹⁵Στο Παράδειγμα 5.6 του βιβλίου ο συναρτητής αυτός συμβολίζεται Free, ενώ στο κεφάλαιο 13 συμβολίζεται F .

¹⁶Βλ. ενότητες 13.3 και 13.7 του βιβλίου μας, ιδιαίτερα την Πρόταση 13.2 και το Παράδειγμα 13.3. Για τη φυσικότητα σε συγκεκριμένα δεδομένα βλ. Άσκηση 13.11.

¹⁷Βλ. ενότητα 13.4 του βιβλίου μας.

Το σχήμα αυτό το έχουμε ξανασυναντήσει. Στις σημειώσεις μας «Ο αντιμεταθέτης και η αβελιανοποίηση» είδαμε την αβελιανοποίηση ως αριστερή προσάρτηση στον συναρτητή εγκλεισμού των αβελιανών ομάδων στις ομάδες. Στις σημειώσεις μας «Ο δυϊκός χώρος και η φυσικότητα» είδαμε τη δυϊκότητα ως προσάρτηση. Το ελεύθερο μονοειδές είναι το πιο απλό παράδειγμα ελεύθερης κατασκευής, δηλαδή αριστερής προσάρτησης σε έναν επιλήσιμονα συναρτητή, και ίσως το πιο καθαρό από όλα, γιατί η κατασκευή είναι εντελώς συγκεκριμένη και η απόδειξη της καθολικής ιδιότητας δεν κρύβει καμία δυσκολία.

Παρατήρηση 7.1. Η σύνθεση $U \circ F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ στέλνει κάθε σύνολο A στο σύνολο A^* των λέξεων, δηλαδή των πεπερασμένων λιστών στοιχείων του A . Ο συναρτητής αυτός, μαζί με την η και την απεικόνιση $\mu_A : (A^*)^* \rightarrow A^*$ που «ισιώνει» μια λίστα από λίστες, παραθέτοντας τις λίστες της στη σειρά, είναι το πρώτο παράδειγμα μονάδας (monad) που εξετάζουμε στο βιβλίο μας, η μονάδα List .¹⁸

Στις επόμενες σημειώσεις θα δούμε την ίδια κατασκευή σε άλλες δομές, την ελεύθερη ομάδα, τον ελεύθερο διανυσματικό χώρο και την ελεύθερη αβελιανή ομάδα. Η ελεύθερη ομάδα είναι αισθητά πιο δύσκολη από το ελεύθερο μονοειδές, γιατί πρέπει να προσθέσουμε αντίστροφα και να απλοποιούμε λέξεις όπως η aa^{-1} . Το σχήμα όμως θα είναι το ίδιο.

8 Σύνοψη

- Μονοειδές είναι ένα σύνολο με μια προσεταιριστική πράξη και ένα ουδέτερο στοιχείο. Κάθε ομάδα είναι μονοειδές, αλλά όχι αντίστροφα.
- Ένας ομομορφισμός μονοειδών πρέπει να διατηρεί και την πράξη και το ουδέτερο στοιχείο. Η δεύτερη συνθήκη δεν προκύπτει από την πρώτη.
- Ένα μονοειδές M είναι κατηγορία $\mathbf{BM}$ με ένα αντικείμενο, και οι ομομορφισμοί μονοειδών είναι ακριβώς οι συναρτητές ανάμεσα σε τέτοιες κατηγορίες.
- Οι ισομορφισμοί της $\mathbf{BM}$ είναι τα αντιστρέψιμα στοιχεία του M . Μια ομάδα είναι κατηγορία με ένα αντικείμενο στην οποία κάθε μορφισμός είναι ισομορφισμός.
- Η δομή μιας κατηγορίας βρίσκεται στους μορφισμούς και στη σύνθεσή τους, όχι μέσα στα αντικείμενα. Μια κατηγορία είναι ένα «μονοειδές με πολλά αντικείμενα».
- Το ελεύθερο μονοειδές A^* αποτελείται από τις λέξεις πάνω στο A , με πράξη την παράθεση. Κάθε συνάρτηση $A \rightarrow U(M)$ επεκτείνεται με μοναδικό τρόπο σε ομομορφισμό $A^* \rightarrow M$.
- Η καθολική αυτή ιδιότητα σημαίνει ότι ο ελεύθερος συναρτητής $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Mon}$ είναι αριστερά προσαρμοσμένος στον επιλήσιμονα U .

¹⁸Βλ. ενότητα 14.1 του βιβλίου μας.