Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 10

10.1 - Κατηγορία δείκτης

i. Ορίζουμε την κατηγορία $\mathcal{J}$ με αντικείμενα $0, 1, 2$ και μη ταυτοτικά βέλη $\alpha : 0 \to 1$ και $\beta : 2 \to 1$. Το σχήμα της είναι $\bullet \to \bullet \leftarrow \bullet$, όπως ζητείται.

ii. Τα βέλη της $\mathcal{J}$ είναι τα ταυτοτικά $\mathrm{id}_0, \mathrm{id}_1, \mathrm{id}_2$ και τα $\alpha : 0 \to 1$, $\beta : 2 \to 1$. Οι μόνες συνθέσεις που ορίζονται περιέχουν ταυτοτικό βέλος, για παράδειγμα $\mathrm{id}_1 \circ \alpha = \alpha = \alpha \circ \mathrm{id}_0$. Οι $\alpha \circ \beta$ και $\beta \circ \alpha$ δεν ορίζονται, γιατί ο στόχος του ενός βέλους δεν είναι η πηγή του άλλου. Η $\mathcal{J}$ είναι λοιπόν κατηγορία με πέντε βέλη.

iii. Ορίζουμε $D : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ με

$$D(0) = A, \quad D(1) = B, \quad D(2) = C, \qquad D(\alpha) = f, \quad D(\beta) = g,$$

και $D(\mathrm{id}_j) = \mathrm{id}_{D(j)}$. Οι ταυτοτικοί διατηρούνται από τον ορισμό. Κάθε σύνθεση της $\mathcal{J}$ περιέχει ταυτοτικό βέλος, οπότε και η διατήρηση της σύνθεσης ισχύει, για παράδειγμα $D(\mathrm{id}_1 \circ \alpha) = D(\alpha) = f = \mathrm{id}_B \circ f$. Άρα ο D είναι συναρτητής, και η εικόνα του είναι ακριβώς το διάγραμμα $A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{g} C$. Αντιστρόφως, κάθε συναρτητής $\mathcal{J} \to \mathcal{C}$ καθορίζεται από τις τιμές του στα τρία αντικείμενα και στα δύο μη ταυτοτικά βέλη, δηλαδή από ένα τέτοιο διάγραμμα. □

10.2 - Κώνος πάνω σε αλυσίδα

i. Η $\mathcal{J}$ έχει αντικείμενα $0, 1, 2$, τα ταυτοτικά βέλη, τα $\alpha : 0 \to 1$ και $\beta : 1 \to 2$, και τη σύνθεσή τους $\beta \circ \alpha : 0 \to 2$, που υπάρχει επειδή η κατηγορία είναι κλειστή ως προς τη σύνθεση. Έχει λοιπόν τρία μη ταυτοτικά βέλη, τα α, β και $\beta \circ \alpha$.

ii. Κάθε βέλος $\gamma : i \to j$ δίνει μία συνθήκη $D(\gamma) \circ \lambda_i = \lambda_j$. Για τα τρία μη ταυτοτικά βέλη παίρνουμε

$$\lambda_B = f \circ \lambda_A, \qquad \lambda_C = g \circ \lambda_B, \qquad \lambda_C = (g \circ f) \circ \lambda_A.$$

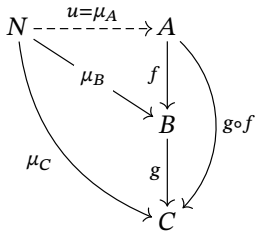
Οι συνθήκες των ταυτοτικών βελών ισχύουν αυτόματα.

iii. Από τις δύο πρώτες συνθήκες $\lambda_B = f \circ \lambda_A$ και $\lambda_C = g \circ f \circ \lambda_A$, οπότε η τρίτη ισχύει αυτόματα. Τα λ_B και λ_C καθορίζονται από το λ_A, και αντιστρόφως κάθε $\lambda_A : N \to A$ δίνει με αυτούς τους τύπους έναν κώνο. Οι κώνοι με κορυφή N αντιστοιχούν λοιπόν ένα προς ένα στους μορφισμούς $N \to A$.

iv. Το όριο είναι το A με τον κώνο

$$\lambda_A = \mathrm{id}_A, \qquad \lambda_B = f, \qquad \lambda_C = g \circ f.$$

Έστω (N, μ_A, μ_B, μ_C) τυχαίος κώνος. Από το (iii) ισχύει $\mu_B = f \circ \mu_A$ και $\mu_C = g \circ f \circ \mu_A$. Ο $u = \mu_A$ ικανοποιεί $\lambda_A \circ u = \mu_A$, $\lambda_B \circ u = \mu_B$ και $\lambda_C \circ u = \mu_C$. Είναι μοναδικός, γιατί η $\mathrm{id}_A \circ u = \mu_A$ τον καθορίζει. □



10.3 - Κώνος πάνω σε βέλος

i. Ένας κώνος με κορυφή N αποτελείται από δύο απεικονίσεις $\mu_A : N \to A$ και $\mu_B : N \to B$ με τη συνθήκη συμβατότητας $f \circ \mu_A = \mu_B$, δηλαδή $f(\mu_A(n)) = \mu_B(n)$ για κάθε $n \in N$.

ii. Το όριο είναι το σύνολο των συμβατών ζευγών

$$\lim D = \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = b\} = \{(1, p), (2, p), (3, q), (4, q)\},$$

με $\lambda_A(a, b) = a$ και $\lambda_B(a, b) = b$. Το ζεύγος (λ_A, λ_B) είναι κώνος, αφού $f(\lambda_A(a, b)) = f(a) = b = \lambda_B(a, b)$. Η καθολικότητα αποδεικνύεται στο (iii).

iii. Έστω κώνος (N', μ_A, μ_B). Ορίζουμε $u : N' \to \lim D$ με $u(n) = (\mu_A(n), \mu_B(n))$. Η u είναι καλά ορισμένη, αφού $f(\mu_A(n)) = \mu_B(n)$, και

$$\lambda_A(u(n)) = \mu_A(n), \qquad \lambda_B(u(n)) = \mu_B(n).$$

Αν η u' ικανοποιεί τις ίδιες ισότητες, οι δύο συντεταγμένες του $u'(n)$ είναι $\mu_A(n)$ και $\mu_B(n)$, άρα $u' = u$. □

iv. Η απεικόνιση $(a, f(a)) \mapsto a$ είναι αμφίρριψη από το $\lim D$ στο A και μεταφέρει τον λ_A στον id_A και τον λ_B στην f. Για άλλη f το υποσύνολο του $A \times B$ αλλάζει, όμως είναι πάντα ισόμορφο με το A. Το όριο είναι λοιπόν, ως προς ισομορφισμό, ο κώνος (A, id_A, f).

Το ίδιο ισχύει σε κάθε κατηγορία, με το επιχείρημα της Άσκησης 10.2. Ένας κώνος (N, μ_A, μ_B) πάνω στο $A \xrightarrow{f} B$ ικανοποιεί $\mu_B = f \circ \mu_A$, άρα καθορίζεται από τον μ_A. Ο $u = \mu_A$ είναι ο μοναδικός μορφισμός με $\mathrm{id}_A \circ u = \mu_A$, και τότε αυτόματα $f \circ u = \mu_B$. Άρα το όριο είναι το (A, id_A, f), χωρίς καμία υπόθεση για την f ή για την κατηγορία.

Γιατί συμβαίνει αυτό; Στα σχήματα $\bullet \to \bullet$ και $\bullet \to \bullet \to \bullet$ υπάρχει αντικείμενο από το οποίο ξεκινά ακριβώς ένα βέλος προς κάθε άλλο, δηλαδή αρχικό αντικείμενο της $\mathcal{J}$. Η συνιστώσα του κώνου σε αυτό καθορίζει όλες τις υπόλοιπες, και το όριο είναι η τιμή του διαγράμματος εκεί.

10.4 - Γινόμενο ως όριο

i. Η διακριτή $\mathcal{J}$ δεν έχει μη ταυτοτικά βέλη, οπότε δεν υπάρχουν συνθήκες συμβατότητας. Ένας κώνος με κορυφή N είναι απλώς ένα ζεύγος μορφισμών $\lambda_1 : N \to D(1)$ και $\lambda_2 : N \to D(2)$.

ii. Έστω $P = D(1) \times D(2)$ με προβολές π_1, π_2. Το (P, π_1, π_2) είναι κώνος. Για κάθε κώνο $(N, \lambda_1, \lambda_2)$ η καθολική ιδιότητα του γινομένου δίνει μοναδικό $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle : N \to P$ με

$$\pi_1 \circ \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \lambda_1, \qquad \pi_2 \circ \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \lambda_2.$$

Αυτό λέει ακριβώς ότι κάθε κώνος διέρχεται μοναδικά μέσω του (P, π_1, π_2). Το γινόμενο, εφόσον υπάρχει, είναι λοιπόν το όριο του διακριτού διαγράμματος. □

10.5 - Εξισωτής στη Ab

i. Ζητάμε τα $n \in \mathbb{Z}$ με $[n] = [2n]$ στο $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Η ισότητα ισοδυναμεί με $[n] = [0]$, δηλαδή με $6 \mid n$. Επομένως

$$\mathrm{Eq}(f, g) = 6\mathbb{Z},$$

υποομάδα του $\mathbb{Z}$, ισόμορφη με το $\mathbb{Z}$.

ii. Οι συνιστώσες του κώνου είναι η εμφύτευση $\lambda_A : 6\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ και ο $\lambda_B = f \circ \lambda_A$. Για κάθε $6k$ έχουμε $\lambda_B(6k) = [6k] = [0]$, άρα ο λ_B είναι ο μηδενικός ομομορφισμός. Οι συνθήκες $f \circ \lambda_A = \lambda_B$ και $g \circ \lambda_A = \lambda_B$ ισχύουν, αφού και οι δύο συνθέσεις στέλνουν κάθε στοιχείο του $6\mathbb{Z}$ στο $[0]$.

iii. Έστω κώνος (N, μ_A, μ_B). Οι συνθήκες δίνουν $f \circ \mu_A = \mu_B = g \circ \mu_A$, οπότε από το (i) $6 \mid \mu_A(n)$ για κάθε $n \in N$. Ορίζουμε $u : N \to 6\mathbb{Z}$ με $u(n) = \mu_A(n)$, που είναι ομομορφισμός, αφού προκύπτει από τον μ_A με περιορισμό του συνόλου τιμών. Τότε $\lambda_A \circ u = \mu_A$ και $\lambda_B \circ u = f \circ \mu_A = \mu_B$. Αν $\lambda_A \circ u' = \mu_A$, τότε $u'(n) = \mu_A(n) = u(n)$, αφού η λ_A είναι εμφύτευση. □

10.6 - Δύο κατασκευές του pullback

Η κατηγορία δείκτης έχει αντικείμενα $1, 2, 3$ και μη ταυτοτικά βέλη $\alpha : 1 \to 3$ και $\beta : 2 \to 3$, με $D(1) = A$, $D(2) = B$, $D(3) = C$, $D(\alpha) = f$, $D(\beta) = g$.

i. Το P έχει έναν παράγοντα για κάθε αντικείμενο της $\mathcal{J}$, άρα $P = A \times B \times C$. Το Q έχει έναν παράγοντα για κάθε μη ταυτοτικό βέλος, τον στόχο του. Οι α και β έχουν και οι δύο στόχο το 3, άρα $Q = C \times C$, με την πρώτη συντεταγμένη για το α και τη δεύτερη για το β.

ii. Γράφουμε π_A, π_B, π_C τις προβολές του P. Από την κατασκευή, η α-συνιστώσα του s είναι η π_C και η α-συνιστώσα του t η $f \circ \pi_A$. Ομοίως για το β. Άρα

$$s = \langle \pi_C, \pi_C \rangle, \qquad t = \langle f \circ \pi_A,\ g \circ \pi_B \rangle,$$

και στη **Set**

$$s(a, b, c) = (c, c), \qquad t(a, b, c) = \big(f(a), g(b)\big).$$

Ο εξισωτής αποτελείται από τις τριάδες με $c = f(a)$ και $c = g(b)$, δηλαδή με $f(a) = c = g(b)$. Η αντιστοιχία $(a, b, c) \mapsto (a, b)$ είναι αμφίρριψη προς το $\{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\}$, με αντίστροφη $(a, b) \mapsto (a, b, f(a))$.

Στη γενική περίπτωση, από την Άσκηση 10.7(iv) ο εξισωτής E με τους $\lambda_j = \pi_j \circ e$ είναι όριο του D. Το όριο ενός διαγράμματος σχήματος $\bullet \to \bullet \leftarrow \bullet$ είναι το pullback (§10.6), και από την Άσκηση 10.10 δύο όρια του ίδιου διαγράμματος είναι ισόμορφα με ισομορφισμό συμβατό με τις συνιστώσες. Άρα $E \cong A \times_C B$, με τους λ_A, λ_B να αντιστοιχούν στις προβολές p_1, p_2.

iii. Η γενική κατασκευή δεν γνωρίζει τίποτα για το σχήμα της $\mathcal{J}$. Θεωρεί τη συνιστώσα του κώνου σε κάθε αντικείμενο ως ανεξάρτητο άγνωστο και επιβάλλει μία εξίσωση για κάθε βέλος. Γι' αυτό εμφανίζεται και ο παράγοντας C, που αντιστοιχεί στο αντικείμενο 3.

Στο σχήμα $1 \to 3 \leftarrow 2$ όμως το 3 είναι στόχος βέλους που ξεκινά από το 1. Η συνθήκη του κώνου για το α δίνει $\lambda_3 = f \circ \lambda_1$, οπότε η συνιστώσα στο 3

δεν είναι ελεύθερη. Ο άγνωστος c μπορεί να απαλειφθεί, και οι δύο εξισώσεις $c = f(a)$, $c = g(b)$ συμπτύσσονται στη μία $f(a) = g(b)$. Αυτό ακριβώς κάνει η Πρόταση 9.2. Παίρνει γινόμενο μόνο των A και B και εξισώνει απευθείας τις δύο διαδρομές $f \circ \pi_1$ και $g \circ \pi_2$ προς το C.

10.7 - Όρια από γινόμενα και εξισωτές

i. Το P έχει έναν παράγοντα για κάθε αντικείμενο,

$$P = A \times B \times C = \mathbb{Z}^3.$$

Το Q έχει έναν παράγοντα για κάθε μη ταυτοτικό βέλος, τον στόχο του. Τα βέλη $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : A \to C$ έχουν στόχους B, C, C, οπότε

$$Q = B \times C \times C = \mathbb{Z}^3,$$

με τις τρεις συντεταγμένες να αντιστοιχούν στα f, g, h με αυτή τη σειρά.

ii. Για κάθε βέλος $\alpha : i \to j$ η α-συνιστώσα του s είναι η π_j και η α-συνιστώσα του t η $D(\alpha) \circ \pi_i$. Άρα

$$s(a,b,c) = (b,\, c,\, c), \qquad t(a,b,c) = (f(a),\, g(b),\, h(a)) = (2a,\, 3b,\, 6a).$$

iii. Το E αποτελείται από τις τριάδες με

$$b = 2a, \qquad c = 3b, \qquad c = 6a.$$

Από τις δύο πρώτες $c = 6a$, οπότε η τρίτη ισχύει αυτόματα, όπως αναμένεται αφού $g \circ f = h$. Άρα

$$E = \{(a,\, 2a,\, 6a) \mid a \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}.$$

Το $\mathcal{J}$ έχει αρχικό αντικείμενο, το A, και όπως στην Άσκηση 10.2 το όριο είναι το $A = \mathbb{Z}$ με συνιστώσες id, f και h. Η αντιστοιχία $(a, 2a, 6a) \mapsto a$ ταυτίζει το E με αυτό, και οι περιορισμοί των τριών προβολών του P στο E γίνονται ακριβώς οι id, f, h.

iv. Έστω $e : E \to P$ ο εξισωτής των s, t και $\lambda_j = \pi_j \circ e$. Γράφουμε $\rho_\alpha : Q \to D(j)$ την προβολή του Q στον παράγοντα του βέλους $\alpha : i \to j$. Από τον ορισμό των s και t,

$$\rho_\alpha \circ s = \pi_j, \qquad \rho_\alpha \circ t = D(\alpha) \circ \pi_i.$$

Το (E, λ_j) *είναι κώνος.* Για κάθε μη ταυτοτικό $\alpha : i \to j$,

$$D(\alpha) \circ \lambda_i = \rho_\alpha \circ t \circ e = \rho_\alpha \circ s \circ e = \pi_j \circ e = \lambda_j.$$

Για τα ταυτοτικά βέλη η συνθήκη ισχύει αυτόματα.

Ύπαρξη. Έστω κώνος (N, μ_j). Από την καθολική ιδιότητα του P υπάρχει μοναδικός $m : N \to P$ με $\pi_j \circ m = \mu_j$ για κάθε j. Για κάθε α έχουμε

$$\rho_\alpha \circ s \circ m = \mu_j, \qquad \rho_\alpha \circ t \circ m = D(\alpha) \circ \mu_i.$$

Η συνθήκη κώνου λέει ότι τα δύο δεξιά μέλη είναι ίσα για κάθε α. Οι $s \circ m$ και $t \circ m$ έχουν λοιπόν τις ίδιες συνθέσεις με όλες τις προβολές του Q, και από τη μοναδικότητα στην καθολική ιδιότητα του γινομένου $s \circ m = t \circ m$. Από την καθολική ιδιότητα του εξισωτή υπάρχει μοναδικός $u : N \to E$ με $e \circ u = m$, και τότε $\lambda_j \circ u = \pi_j \circ m = \mu_j$.

Μοναδικότητα. Αν $o \circ u' : N \to E$ ικανοποιεί $\lambda_j \circ u' = \mu_j$ για κάθε j, τότε $\pi_j \circ (e \circ u') = \mu_j$, οπότε $e \circ u' = m$ από τη μοναδικότητα στο P. Ο e είναι μονομορφισμός (Πρόταση 9.1), άρα $u' = u$. □

10.8 - Τελικό αντικείμενο ως όριο

Το κενό διάγραμμα δεν έχει αντικείμενα ούτε βέλη. Ένας κώνος με κορυφή N πάνω σε αυτό δεν έχει καμία συνιστώσα και δεν ικανοποιεί καμία συνθήκη. Κάθε αντικείμενο N της $\mathcal{C}$ είναι λοιπόν, με μοναδικό τρόπο, κώνος.

Για τον ίδιο λόγο ένας μορφισμός κορυφών $N \to L$ δεν έχει κανένα τρίγωνο να κάνει αντιμεταθετικό, άρα κάθε μορφισμός $N \to L$ είναι μορφισμός κώνων. Η καθολική ιδιότητα του ορίου L λέει τότε ότι για κάθε αντικείμενο N υπάρχει ακριβώς ένας μορφισμός $N \to L$. Αυτός είναι ο ορισμός του τελικού αντικειμένου. Αντιστρόφως, ένα τελικό αντικείμενο ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα, άρα είναι όριο του κενού διαγράμματος. □

10.9 - Μοναδικότητα με κώνους

Θέτουμε $\mu_j = \lambda_j \circ u = \lambda_j \circ v$ για κάθε j. Το (N, μ_j) είναι κώνος, αφού για κάθε $\alpha : i \to j$

$$D(\alpha) \circ \mu_i = D(\alpha) \circ \lambda_i \circ u = \lambda_j \circ u = \mu_j,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι το (L, λ_j) είναι κώνος. Από την καθολική ιδιότητα του ορίου υπάρχει μοναδικός $w : N \to L$ με $\lambda_j \circ w = \mu_j$ για κάθε j. Οι u και v ικανοποιούν και οι δύο αυτή την ιδιότητα, άρα $u = w = v$.

Για την εφαρμογή θέτουμε $N = L$. Αν $o\ u : L \to L$ ικανοποιεί $\lambda_j \circ u = \lambda_j$ για κάθε j, τότε $\lambda_j \circ u = \lambda_j \circ \mathrm{id}_L$, και από το προηγούμενο $u = \mathrm{id}_L$. □

10.10 - Μοναδικότητα ορίου

i. Το (L', λ'_j) είναι κώνος πάνω στο D, οπότε η καθολική ιδιότητα του (L, λ_j) δίνει μοναδικό $u : L' \to L$ με $\lambda_j \circ u = \lambda'_j$ για κάθε j. Συμμετρικά, η καθολική ιδιότητα του (L', λ'_j) δίνει μοναδικό $v : L \to L'$ με $\lambda'_j \circ v = \lambda_j$ για κάθε j.

ii. Για κάθε j

$$\lambda_j \circ (u \circ v) = (\lambda_j \circ u) \circ v = \lambda'_j \circ v = \lambda_j = \lambda_j \circ \mathrm{id}_L,$$

οπότε από την Άσκηση 10.9 $u \circ v = \mathrm{id}_L$. Με τον ίδιο υπολογισμό $\lambda'_j \circ (v \circ u) = \lambda'_j \circ \mathrm{id}_{L'}$, και από την Άσκηση 10.9 για το όριο (L', λ'_j) παίρνουμε $v \circ u = \mathrm{id}_{L'}$.

iii. Από το (ii) ο u είναι ισομορφισμός με αντίστροφο τον v, άρα $L \cong L'$. Κάθε ισομορφισμός $L' \to L$ με $\lambda_j \circ u = \lambda'_j$ είναι ειδικότερα μορφισμός με αυτή την ιδιότητα, και από το (i) υπάρχει μόνο ένας. □

10.11 - Pullback κυκλικών ομάδων

i. Ένας ομομορφισμός από κυκλική ομάδα τάξης n καθορίζεται από την εικόνα του γεννήτορα, και ορίζεται καλά ακριβώς όταν η τάξη της εικόνας διαιρεί το n. Το $[3]_6$ έχει τάξη 2, άρα η $\varphi([a]_2) = [3a]_6$ είναι καλά ορισμένος ομομορφισμός. Το $[2]_6$ έχει τάξη 3, άρα και η $\psi([b]_3) = [2b]_6$ είναι καλά ορισμένος ομομορφισμός.

ii. Ζητάμε τα ζεύγη με $3a \equiv 2b \pmod 6$, όπου $a \in \{0, 1\}$ και $b \in \{0, 1, 2\}$. Για $a = 0$ η συνθήκη γίνεται $2b \equiv 0 \pmod 6$, και από τις τιμές $0, 2, 4$ του $2b$ μόνο το $b = 0$ την ικανοποιεί. Για $a = 1$ η συνθήκη γίνεται $2b \equiv 3 \pmod 6$, που είναι αδύνατη, αφού ο $2b - 3$ είναι περιττός και δεν διαιρείται από το 6. Άρα

$$G \times_K H = \{([0]_2, [0]_3)\}.$$

iii. Το σύνολο αποτελείται μόνο από το ουδέτερο στοιχείο του $G \times H$, και $([0]_2, [0]_3) + ([0]_2, [0]_3) = ([0]_2, [0]_3)$. Είναι λοιπόν κλειστό ως προς την πράξη και υποομάδα.

iv. Το pullback είναι η τετριμμένη ομάδα. Το γινόμενο $G \times H$ είναι ισόμορφο με το $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, η συνθήκη του pullback όμως το περιορίζει στο ουδέτερο στοιχείο. Οι

εικόνες $\varphi(G) = \{[0]_6, [3]_6\}$ και $\psi(H) = \{[0]_6, [2]_6, [4]_6\}$ τέμνονται μόνο στο $[0]_6$, και οι φ, ψ είναι ερρίψεις, οπότε μόνο το $([0]_2, [0]_3)$ απεικονίζεται σε αυτή την τομή.

v. Οι αναγωγές modulo 2, $\varphi([a]_4) = [a]_2$ και $\psi([b]_6) = [b]_2$, είναι καλά ορισμένοι ομομορφισμοί, αφού $2 \mid 4$ και $2 \mid 6$. Το pullback είναι

$$G \times_K H = \{([a]_4, [b]_6) \mid a \equiv b \pmod 2\}.$$

Για άρτιο a υπάρχουν 2 επιλογές του a και 3 του b, και το ίδιο για περιττό a. Το pullback έχει λοιπόν $2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 12$ στοιχεία. Περιέχει το $([1]_4, [1]_6)$, που έχει τάξη $\operatorname{lcm}(4, 6) = 12$, άρα είναι κυκλικό και

$$G \times_K H \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}.$$

Τι διαφοροποιεί τις δύο περιπτώσεις; Για κάθε $k \in \varphi(G) \cap \psi(H)$ τα $\varphi^{-1}(k)$ και $\psi^{-1}(k)$ είναι σύμπλοκα των πυρήνων, οπότε

$$|G \times_K H| = |\ker\varphi| \cdot |\ker\psi| \cdot |\varphi(G) \cap \psi(H)|.$$

Στο (iv) οι πυρήνες είναι τετριμμένοι και οι εικόνες τέμνονται μόνο στο ουδέτερο, άρα $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. Εδώ οι φ, ψ είναι επιρρίψεις, η τομή των εικόνων είναι ολόκληρο το K και οι πυρήνες έχουν τάξεις 2 και 3, άρα $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$. Στην πρώτη περίπτωση η συνθήκη $\varphi(g) = \psi(h)$ είναι τόσο αυστηρή ώστε αφήνει μόνο το ουδέτερο. Στη δεύτερη απορρίπτει μόνο τα μισά ζεύγη του $G \times H$, που έχει 24 στοιχεία.

10.12 - Όριο συγκλινόντων βελών στη Ab

Το διάγραμμα έχει σχήμα $\bullet \to \bullet \leftarrow \bullet$, άρα το όριο είναι το pullback των $\times 2$ και $\times 3$,

$$\lim D = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 2m = 3n\}.$$

Από την $2m = 3n$ έχουμε $3 \mid 2m$, και αφού $\gcd(2, 3) = 1$, $3 \mid m$. Για $m = 3k$ παίρνουμε $n = 2k$, οπότε

$$\lim D = \{(3k,\ 2k) \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

υποομάδα του $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ισόμορφη με το $\mathbb{Z}$ μέσω της $(3k, 2k) \mapsto k$.

Ονομάζουμε A_1, A_2, A_3 τα τρία αντίγραφα του $\mathbb{Z}$ από αριστερά προς τα δεξιά. Οι συνιστώσες του κώνου του ορίου είναι $\lambda_1(m,n) = m$, $\lambda_3(m,n) = n$ και $\lambda_2 = 2\lambda_1 = 3\lambda_3$. Ένας κώνος (N, μ_1, μ_2, μ_3) ικανοποιεί

$$\mu_2 = 2\mu_1, \qquad \mu_2 = 3\mu_3,$$

οπότε $2\mu_1(x) = 3\mu_3(x)$ για κάθε $x \in N$ και το ζεύγος $(\mu_1(x), \mu_3(x))$ ανήκει στο $\lim D$. Ο $u(x) = (\mu_1(x), \mu_3(x))$ είναι ομομορφισμός, αφού οι μ_1 και μ_3 είναι ομομορφισμοί, και

$$\lambda_1 \circ u = \mu_1, \qquad \lambda_3 \circ u = \mu_3, \qquad \lambda_2 \circ u = 2\mu_1 = \mu_2.$$

Ο u είναι μοναδικός, γιατί οι δύο συντεταγμένες του $u(x)$ καθορίζονται από τις $\lambda_1 \circ u = \mu_1$ και $\lambda_3 \circ u = \mu_3$. □

10.13 - Όρια σε poset

i. Μια συνιστώσα $\mu_j : N \to D(j)$ υπάρχει ακριβώς όταν $N \leq D(j)$, και τότε είναι μοναδική, αφού σε poset υπάρχει το πολύ ένα βέλος ανάμεσα σε δύο αντικείμενα. Οι συνθήκες συμβατότητας $D(\alpha) \circ \mu_i = \mu_j$ ισχύουν αυτόματα, γιατί και τα δύο μέλη είναι βέλη $N \to D(j)$. Επομένως κώνος με κορυφή N υπάρχει αν και μόνο αν $N \leq D(j)$ για κάθε j, και είναι μοναδικός. Οι κώνοι είναι λοιπόν ακριβώς τα κάτω φράγματα του συνόλου $\{D(j) \mid j \in \mathcal{J}\}$.

ii. Ένα όριο είναι ένα κάτω φράγμα L τέτοιο ώστε για κάθε κάτω φράγμα N να υπάρχει μοναδικό βέλος $N \to L$ που κάνει τα τρίγωνα αντιμεταθετικά. Η μοναδικότητα και η αντιμεταθετικότητα είναι πάλι αυτόματες, οπότε η απαίτηση λέει απλώς ότι $N \leq L$ για κάθε κάτω φράγμα N. Το L είναι λοιπόν κάτω φράγμα μεγαλύτερο από κάθε άλλο κάτω φράγμα, δηλαδή μέγιστο κάτω φράγμα. Αντιστρόφως, το μέγιστο κάτω φράγμα, όταν υπάρχει, ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα. Άρα

$$\lim D = \inf_j D(j).$$

Σε poset δύο ισόμορφα αντικείμενα είναι ίσα, λόγω της αντισυμμετρίας, οπότε η μοναδικότητα ως προς ισομορφισμό γίνεται εδώ μοναδικότητα του infimum. Για $\mathcal{J}$ κενή κάθε στοιχείο είναι κάτω φράγμα, και το όριο είναι το μέγιστο στοιχείο του P, σε συμφωνία με την Άσκηση 10.8.

iii. Στο $(\mathbb{N}, |)$ υπάρχει βέλος $x \to y$ ακριβώς όταν $x \mid y$. Το γινόμενο των m και n είναι το όριο του διακριτού διαγράμματος με τιμές m, n, δηλαδή το μέγιστο κάτω φράγμα τους ως προς τη διαιρετότητα. Τα κάτω φράγματα είναι οι κοινοί

διαιρέτες, και ο κοινός διαιρέτης που διαιρείται από κάθε άλλο κοινό διαιρέτη είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης. Άρα

$$m \times n = \gcd(m, n),$$

όπως στην Άσκηση 8.5.

10.14 - Φθίνουσα ακολουθία συνόλων

Το όριο είναι η τομή

$$\lim D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D(n),$$

με συνιστώσες τις εμφυτεύσεις $\lambda_n : \bigcap_m D(m) \hookrightarrow D(n)$.

Κώνος. Για $m \geq n$ ο $D(m \to n)$ είναι η εμφύτευση $D(m) \hookrightarrow D(n)$, οπότε $D(m \to n) \circ \lambda_m = \lambda_n$, αφού και τα δύο μέλη είναι η εμφύτευση της τομής στο $D(n)$.

Καθολική ιδιότητα. Έστω κώνος (N, μ_n). Για κάθε $m \geq n$ ισχύει $D(m \to n) \circ \mu_m = \mu_n$, και επειδή ο $D(m \to n)$ είναι εμφύτευση, $\mu_n(x) = \mu_m(x)$ για κάθε $x \in N$. Όλες οι συνιστώσες στέλνουν λοιπόν το x στο ίδιο στοιχείο $\mu(x) = \mu_0(x)$, που ανήκει στο $D(n)$ για κάθε n, δηλαδή στην τομή. Η $u : N \to \lim D$ με $u(x) = \mu(x)$ ικανοποιεί $\lambda_n \circ u = \mu_n$ για κάθε n. Είναι μοναδική, γιατί οι λ_n είναι εμφυτεύσεις. □

Το όριο μπορεί να είναι κενό ακόμη κι αν κανένα $D(n)$ δεν είναι κενό. Για $D(n) = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$ η τομή είναι το $\varnothing$.

10.15 - Ρητός υπολογισμός pullback

i. Το pullback είναι

$$X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid p(x) = q(y)\}.$$

Έχουμε $p(1) = p(3) = p(5) = 1$ και $p(2) = p(4) = p(6) = 0$. Για $y \in \{a, b\}$ ισχύει $q(y) = 0$, οπότε ταιριάζουν τα άρτια x. Για $y = c$ ισχύει $q(c) = 1$, οπότε ταιριάζουν τα περιττά x. Επομένως

$$X \times_Z Y = \{(2, a), (4, a), (6, a), (2, b), (4, b), (6, b), (1, c), (3, c), (5, c)\},$$

σύνολο με 9 στοιχεία.

ii. Το διάγραμμα εκφράζει ένα σύστημα με δύο αγνώστους, $x \in X$ και $y \in Y$, και έναν περιορισμό, την $p(x) = q(y)$. Η ισοτιμία του x πρέπει να συμπίπτει με την ετικέτα $q(y)$ του y. Οι λύσεις του συστήματος είναι ακριβώς τα 9 ζεύγη του (i).

iii. Για $q(a) = q(b) = q(c) = 0$ ο περιορισμός γίνεται $p(x) = 0$, ανεξάρτητα από το y, οπότε

$$X \times_Z Y = \{2, 4, 6\} \times \{a, b, c\},$$

σύνολο πάλι με 9 στοιχεία. Ο περιορισμός δεν δεσμεύει πια το y και το pullback γίνεται καρτεσιανό γινόμενο της ίνας $p^{-1}(0)$ με ολόκληρο το Y. Το πλήθος των λύσεων μένει ίδιο, η δομή τους όμως αλλάζει, αφού τα περιττά στοιχεία του X αποκλείονται πλήρως. □

10.16 - Γιατί το $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ δεν είναι σώμα

i. Τα $(1, 0)$ και $(0, 1)$ είναι διάφορα του $(0, 0)$, όμως

$$(1, 0) \cdot (0, 1) = (0, 0).$$

Σε σώμα το γινόμενο μη μηδενικών στοιχείων είναι μη μηδενικό, άρα το $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ δεν είναι σώμα. Ισοδύναμα, το $(1, 0)$ δεν έχει αντίστροφο, αφού $(1, 0) \cdot (x, y) = (x, 0) \neq (1, 1)$.

ii. Το $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ δεν είναι αντικείμενο της **Field**, άρα δεν μπορεί το ίδιο να είναι το κατηγορικό γινόμενο. Αυτό όμως δεν αποκλείει την ύπαρξη γινομένου. Το γινόμενο ορίζεται από την καθολική του ιδιότητα και όχι από μια συγκεκριμένη κατασκευή, οπότε θα μπορούσε καταρχήν να είναι κάποιο άλλο σώμα, με προβολές που δεν έχουν σχέση με τις προβολές του καρτεσιανού γινομένου. Ο αποκλεισμός ενός υποψηφίου δεν αποδεικνύει τη μη ύπαρξη.

iii. Στην Άσκηση 8.19 το κρίσιμο βήμα ήταν ότι κάθε ομομορφισμός σωμάτων διατηρεί τη χαρακτηριστική. Ένα σώμα με ομομορφισμούς προς το $\mathbb{Q}$ και προς το $\mathbb{F}_2$ θα είχε ταυτόχρονα χαρακτηριστική 0 και 2, οπότε πάνω στο ζεύγος $(\mathbb{Q}, \mathbb{F}_2)$ δεν υπάρχει κανένας κώνος. Για δύο αντίγραφα του $\mathbb{Q}$ αυτό το βήμα δεν μεταφέρεται. Και τα δύο έχουν χαρακτηριστική 0, και κώνοι υπάρχουν, με απλούστερο τον $(\mathbb{Q}, \mathrm{id}, \mathrm{id})$.

Στην περίπτωση αυτή το γινόμενο μάλιστα υπάρχει και είναι το $(\mathbb{Q}, \mathrm{id}, \mathrm{id})$. Κάθε ομομορφισμός σωμάτων είναι έρριψη, οπότε ένα σώμα K με ομομορφισμό $u : K \to \mathbb{Q}$ είναι ισόμορφο με υπόσωμα του $\mathbb{Q}$, δηλαδή με το ίδιο το $\mathbb{Q}$, που δεν έχει γνήσια υποσώματα. Ο u είναι λοιπόν ισομορφισμός. Για κάθε κώνο (K, u, v) ο $v \circ u^{-1}$ είναι ενδομορφισμός του $\mathbb{Q}$, άρα η ταυτοτική, και $u = v$. Ο κώνος διέρχεται τότε μοναδικά μέσω του $(\mathbb{Q}, \mathrm{id}, \mathrm{id})$, με τον u.

iv. Η διακριτή κατηγορία με δύο αντικείμενα είναι πεπερασμένη, και το διάγραμμα με τιμές $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{F}_2$ δεν έχει όριο, αφού δεν έχει καν κώνο. Η **Field** δεν έχει λοιπόν όρια όλων των πεπερασμένων σχημάτων και δεν είναι πεπερασμένα πλήρης. Το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι δεν έχει ούτε τελικό αντικείμενο, δηλαδή όριο του κενού διαγράμματος, αφού ένα τέτοιο σώμα θα δεχόταν ομομορφισμούς από το $\mathbb{Q}$ και από το $\mathbb{F}_2$. Η **Field** έχει εξισωτές, της λείπουν όμως τα πεπερασμένα γινόμενα, και το Θεώρημα 10.1 απαιτεί και τα δύο. □