Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 9

9.1 - Εξισωτής στη Set

i. Το σύνολο
$$E = \{x \in A \mid f(x) = g(x)\}$$
είναι το υποσύνολο του A στο οποίο οι f και g παίρνουν την ίδια τιμή.

ii. Για κάθε $x \in E$ έχουμε $(f \circ e)(x) = f(x) = g(x) = (g \circ e)(x)$, από τον ορισμό του E. Άρα $f \circ e = g \circ e$.

iii. Έστω $h : X \to A$ με $f \circ h = g \circ h$. Για κάθε $t \in X$ ισχύει $f(h(t)) = g(h(t))$, άρα $h(t) \in E$. Ορίζουμε επομένως $\hat{h} : X \to E$ με $\hat{h}(t) = h(t)$. Τότε $(e \circ \hat{h})(t) = e(h(t)) = h(t)$, δηλαδή $e \circ \hat{h} = h$.

$$X \xrightarrow{\hat{h}} E \xrightarrow{e} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B, \qquad X \xrightarrow{h} A$$

Μοναδικότητα. Έστω $\hat{h}' : X \to E$ με $e \circ \hat{h}' = h$. Τότε $e(\hat{h}'(t)) = h(t) = e(\hat{h}(t))$ για κάθε t. Η e είναι εμφύτευση, άρα έρριψη, οπότε $\hat{h}' = \hat{h}$.

Το (E, e) ικανοποιεί και τις δύο συνθήκες του ορισμού, άρα είναι εξισωτής των f και g στη **Set**. □

9.2 - Εξισωτής στο $\mathbb{R}$

i. Η εξίσωση $f(x) = g(x)$ γράφεται $x^2 - 1 = x$, δηλαδή $x^2 - x - 1 = 0$. Η διακρίνουσα είναι $5 > 0$, άρα
$$E = \left\{ \frac{1 - \sqrt{5}}{2},\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}.$$
Το E έχει δύο στοιχεία, τον χρυσό λόγο και τον συζυγή του.

ii. Ο εξισωτής είναι το ζεύγος (E, e), όπου $e : E \hookrightarrow \mathbb{R}$ η εμφύτευση. Ισχύει $f \circ e = g \circ e$, και κάθε $h : X \to \mathbb{R}$ με $f \circ h = g \circ h$ παίρνει τιμές στο E, οπότε διέρχεται μοναδικά μέσω του e, όπως στην Άσκηση 9.1.

iii. Το διάγραμμα είναι
$$E \xrightarrow{e} \mathbb{R} \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \mathbb{R}$$

με $f \circ e = g \circ e$. Οι δύο παράλληλοι μορφισμοί γίνονται ίσοι μόλις τους περιορίσουμε στο E.

iv. Στο Παράδειγμα 9.1 η εξίσωση $x^2 = 2x-1$ γράφεται $(x-1)^2 = 0$ και έχει διπλή ρίζα, οπότε ο εξισωτής είναι το μονοσύνολο $\{1\}$. Εδώ η εξίσωση είναι επίσης δευτέρου βαθμού, όμως έχει δύο διαφορετικές ρίζες και ο εξισωτής έχει δύο στοιχεία. Τι μας δείχνει η σύγκριση; Ο ορισμός του εξισωτή δεν προκαθορίζει το πλήθος των στοιχείων του. Αυτό εξαρτάται αποκλειστικά από τα f και g, και ισούται με το πλήθος των διαφορετικών πραγματικών ριζών της $f - g$. Για $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = 0$ ο εξισωτής είναι κενός, ενώ για $f = g$ είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

9.3 - Ρητός υπολογισμός pullback

i. Για $\alpha = 1$ έχουμε $f(1) = x$, άρα χρειαζόμαστε β με $g(\beta) = x$, δηλαδή $\beta \in \{a, b\}$. Για $\alpha = 2$ έχουμε $f(2) = y$, άρα $\beta = c$. Επομένως

$$P = \{(1, a),\ (1, b),\ (2, c)\}.$$

ii. Οι προβολές δίνονται από τους πίνακες

z	$(1,a)$	$(1,b)$	$(2,c)$
$p_1(z)$	1	1	2
$p_2(z)$	a	b	c

iii. Ελέγχουμε κάθε στοιχείο του P.

$$\begin{aligned} f(p_1(1,a)) &= f(1) = x = g(a) = g(p_2(1,a)), \\ f(p_1(1,b)) &= f(1) = x = g(b) = g(p_2(1,b)), \\ f(p_1(2,c)) &= f(2) = y = g(c) = g(p_2(2,c)). \end{aligned}$$

Άρα $f \circ p_1 = g \circ p_2$, και το τετράγωνο

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p_2} & B \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A & \xrightarrow[f]{} & C \end{array}$$

αντιμετατίθεται. □

9.4 - Καθολική ιδιότητα pullback στη Set

i. Για το p έχουμε $f(h_1(p)) = f(1) = x$ και $g(h_2(p)) = g(a) = x$. Για το q έχουμε $f(h_1(q)) = f(1) = x$ και $g(h_2(q)) = g(b) = x$. Άρα $f \circ h_1 = g \circ h_2$.

ii. Πρέπει $p_1(u(p)) = h_1(p) = 1$ και $p_2(u(p)) = h_2(p) = a$, άρα $u(p) = (1, a)$. Ομοίως $p_1(u(q)) = 1$ και $p_2(u(q)) = b$, άρα $u(q) = (1, b)$.

iii. Έχουμε

$$(p_1 \circ u)(p) = p_1(1, a) = 1 = h_1(p), \qquad (p_2 \circ u)(p) = p_2(1, a) = a = h_2(p),$$

και ομοίως στο q.

iv. Κάθε στοιχείο του P είναι ζεύγος $(\alpha, \beta) \in A \times B$, και οι p_1, p_2 είναι οι δύο συντεταγμένες του. Αν η $u' : X \to P$ ικανοποιεί $p_1 \circ u' = h_1$ και $p_2 \circ u' = h_2$, τότε και οι δύο συντεταγμένες του $u'(t)$ είναι γνωστές για κάθε $t \in X$, οπότε $u'(t) = (h_1(t), h_2(t)) = u(t)$. Ένα στοιχείο του P δεν έχει τίποτε άλλο εκτός από τις δύο συντεταγμένες του, και αυτές ακριβώς τις καθορίζουν οι h_1 και h_2.

9.5 - Pullback στη Set

i. Ορίζουμε $p_1(a, b) = a$ και $p_2(a, b) = b$. Για $(a, b) \in P$ ισχύει $f(a) = g(b)$ από τον ορισμό του P, δηλαδή $f(p_1(a, b)) = g(p_2(a, b))$. Άρα $f \circ p_1 = g \circ p_2$.

ii. Έστω $h_1 : X \to A$ και $h_2 : X \to B$ με $f \circ h_1 = g \circ h_2$. Ορίζουμε $u(t) = (h_1(t), h_2(t))$. Το ζεύγος ανήκει στο P, αφού $f(h_1(t)) = g(h_2(t))$ από την υπόθεση. Επιπλέον $p_1(u(t)) = h_1(t)$ και $p_2(u(t)) = h_2(t)$.

Μοναδικότητα. Αν η $u' : X \to P$ ικανοποιεί $p_1 \circ u' = h_1$ και $p_2 \circ u' = h_2$, τότε

$$u'(t) = \big(p_1(u'(t)), p_2(u'(t))\big) = \big(h_1(t), h_2(t)\big) = u(t).$$

Άρα η τριάδα (P, p_1, p_2) είναι pullback των f και g στη **Set**. □

9.6 - Pullback και τομή συνόλων

i. Ορίζουμε τις $j_A : A \cap B \to A$ και $j_B : A \cap B \to B$ ως τις εμφυτεύσεις, $j_A(x) = x$ και $j_B(x) = x$. Για $x \in A \cap B$ έχουμε

$$(\iota_A \circ j_A)(x) = x = (\iota_B \circ j_B)(x),$$

άρα $\iota_A \circ j_A = \iota_B \circ j_B$.

ii. Από την $\iota_A \circ h_1 = \iota_B \circ h_2$ παίρνουμε, για κάθε $x \in X$,

$$h_1(x) = (\iota_A \circ h_1)(x) = (\iota_B \circ h_2)(x) = h_2(x).$$

Το στοιχείο αυτό ανήκει στο A ως τιμή της h_1 και στο B ως τιμή της h_2, άρα ανήκει στο $A \cap B$. Η $u(x) = h_1(x)$ ορίζει επομένως συνάρτηση $u : X \to A \cap B$.

iii. Ισχύει $(j_A \circ u)(x) = h_1(x)$ και $(j_B \circ u)(x) = h_1(x) = h_2(x)$, άρα $j_A \circ u = h_1$ και $j_B \circ u = h_2$.

Μοναδικότητα. Αν η $u' : X \to A \cap B$ ικανοποιεί $j_A \circ u' = h_1$, τότε $u'(x) = j_A(u'(x)) = h_1(x) = u(x)$ για κάθε x. Αρκεί λοιπόν ήδη η πρώτη από τις δύο συνθήκες.

iv. Η τριάδα $(A \cap B, j_A, j_B)$ ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα, άρα είναι pullback των ι_A και ι_B στη **Set**. □

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \xrightarrow{j_B} & B \\ {\scriptstyle j_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota_B} \\ A & \xrightarrow[\iota_A]{} & C \end{array}$$

9.7 - Pullback και αντίστροφη εικόνα

i. Θεωρούμε $P = \{a \in A \mid f(a) \in S\}$, τον $p : P \to A$ ως την εμφύτευση και τον $q : P \to S$ με $q(a) = f(a)$. Ο q είναι καλά ορισμένος, αφού $f(a) \in S$ για $a \in P$. Τότε

$$(i \circ q)(a) = f(a) = f(p(a)) = (f \circ p)(a),$$

άρα $i \circ q = f \circ p$.

ii. Έστω $h_1 : X \to A$ και $h_2 : X \to S$ με $f \circ h_1 = i \circ h_2$. Για κάθε $t \in X$ έχουμε $f(h_1(t)) = i(h_2(t)) = h_2(t) \in S$, άρα $h_1(t) \in P$. Ορίζουμε $u : X \to P$ με $u(t) = h_1(t)$. Τότε $p \circ u = h_1$, και $q(u(t)) = f(h_1(t)) = h_2(t)$, άρα $q \circ u = h_2$.

Μοναδικότητα. Αν η $u' : X \to P$ ικανοποιεί $p \circ u' = h_1$, τότε, επειδή ο p είναι εμφύτευση, $u'(t) = h_1(t) = u(t)$.

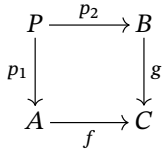
Άρα το τετράγωνο είναι pullback. □

iii. Το P είναι ακριβώς η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(S)$. Έστω (P', p', q') οποιοδήποτε άλλο pullback των f και i. Από την Άσκηση 9.15 υπάρχει ισομορφισμός $\varphi : P' \to P$ με $p \circ \varphi = p'$ και $q \circ \varphi = q'$. Η πρώτη ισότητα είναι η ζητούμενη συμβατότητα

με τον p. Το P' αντιστοιχεί στο $f^{-1}(S)$ με τρόπο που σέβεται την εμφύτευσή του στο A. □

9.8 - Το pullback μονομορφισμού

Το τετράγωνο του pullback είναι



με $f \circ p_1 = g \circ p_2$ και g μονομορφισμό.

i. Χρησιμοποιώντας δύο φορές την αντιμεταθετικότητα του τετραγώνου και την υπόθεση $p_1 \circ u = p_1 \circ v$, παίρνουμε

$$g \circ p_2 \circ u = f \circ p_1 \circ u = f \circ p_1 \circ v = g \circ p_2 \circ v.$$

ii. Ο g είναι μονομορφισμός, άρα απαλείφεται από αριστερά, και $p_2 \circ u = p_2 \circ v$.

iii. Θέτουμε $h_1 = p_1 \circ u$ και $h_2 = p_2 \circ u$. Το ζεύγος (h_1, h_2) ικανοποιεί $f \circ h_1 = g \circ h_2$, αφού $f \circ p_1 = g \circ p_2$. Ο u ικανοποιεί προφανώς $p_1 \circ u = h_1$ και $p_2 \circ u = h_2$. Ο v ικανοποιεί τις ίδιες ισότητες, την πρώτη από την υπόθεση και τη δεύτερη από το (ii). Από τη μοναδικότητα στην καθολική ιδιότητα του (P, p_1, p_2) παίρνουμε $u = v$. Ο p_1 είναι επομένως μονομορφισμός.

iv. *Αν ο f είναι μονομορφισμός, τότε ο p_2 είναι μονομορφισμός.* Η απόδειξη είναι η ίδια με ανταλλαγμένους ρόλους. Έστω $u, v : X \to P$ με $p_2 \circ u = p_2 \circ v$. Τότε

$$f \circ p_1 \circ u = g \circ p_2 \circ u = g \circ p_2 \circ v = f \circ p_1 \circ v,$$

και επειδή ο f είναι μονομορφισμός, $p_1 \circ u = p_1 \circ v$. Οι u και v έχουν τις ίδιες συνθέσεις με τις δύο προβολές, άρα $u = v$ από τη μοναδικότητα στην καθολική ιδιότητα. □

v. Έστω $B \subseteq C$ και g η εμφύτευση. Από την Άσκηση 9.5 το pullback είναι

$$P = \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = b\},$$

και η δεύτερη συντεταγμένη κάθε στοιχείου καθορίζεται από την πρώτη. Η $p_1(a,b) = a$ είναι λοιπόν έρριψη, δηλαδή μονομορφισμός της **Set**. Η αντιστοιχία $(a, f(a)) \mapsto a$ ταυτίζει το P με το $\{a \in A \mid f(a) \in B\} = f^{-1}(B)$ και τον p_1 με την εμφύτευση $f^{-1}(B) \hookrightarrow A$. Αυτό είναι ακριβώς το pullback της Άσκησης 9.7, με το B στον ρόλο του S. Το γενικό αποτέλεσμα λέει λοιπόν ότι η αντίστροφη εικόνα ενός υποσυνόλου είναι πάλι υποσύνολο.

9.9 - Εξισωτής στη Grp

i. Το $E = \{g \in G \mid \varphi(g) = \psi(g)\}$ είναι υποομάδα του G.

- *Ουδέτερο.* $\varphi(e_G) = e_H = \psi(e_G)$, άρα $e_G \in E$.
- *Κλειστότητα.* Αν $g, g' \in E$, τότε $\varphi(gg') = \varphi(g)\varphi(g') = \psi(g)\psi(g') = \psi(gg')$, άρα $gg' \in E$.
- *Αντίστροφα.* Αν $g \in E$, τότε $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1} = \psi(g)^{-1} = \psi(g^{-1})$, άρα $g^{-1} \in E$.

ii. Η απόδειξη ακολουθεί την Άσκηση 9.1. Η εμφύτευση $e : E \hookrightarrow G$ είναι ομομορφισμός και ικανοποιεί $\varphi \circ e = \psi \circ e$ από τον ορισμό του E. Έστω ομάδα X και ομομορφισμός $h : X \to G$ με $\varphi \circ h = \psi \circ h$. Τότε $h(x) \in E$ για κάθε $x \in X$, και ορίζεται ο $\hat{h} : X \to E$ με $\hat{h}(x) = h(x)$. Η πράξη του E είναι ο περιορισμός της πράξης του G, άρα ο $\hat{h}$ είναι ομομορφισμός, και $e \circ \hat{h} = h$. Η μοναδικότητα προκύπτει, όπως στην Άσκηση 9.1, από το ότι η e είναι έρριψη. Άρα το (E, e) είναι εξισωτής των φ και ψ στη **Grp**. □

9.10 - Εξισωτής στη Vect

i. Έχουμε

$$E = \{v \in V \mid T(v) = S(v)\} = \{v \in V \mid (T - S)(v) = 0\} = \ker(T - S).$$

Η $T - S$ είναι γραμμική και ο πυρήνας κάθε γραμμικής απεικόνισης είναι υπόχωρος, άρα το E είναι υπόχωρος του V.

ii. Για $v \in E$ έχουμε $(T \circ e)(v) = T(v) = S(v) = (S \circ e)(v)$.

iii. Έστω $h : U \to V$ γραμμική με $T \circ h = S \circ h$. Για κάθε $u \in U$ ισχύει $T(h(u)) = S(h(u))$, άρα $h(u) \in E$, και ορίζεται η $\hat{h} : U \to E$ με $\hat{h}(u) = h(u)$. Για $u_1, u_2 \in U$ και $\lambda \in \mathbb{F}$ έχουμε

$$\hat{h}(\lambda u_1 + u_2) = h(\lambda u_1 + u_2) = \lambda h(u_1) + h(u_2) = \lambda \hat{h}(u_1) + \hat{h}(u_2),$$

άρα η $\hat{h}$ είναι γραμμική. Ισχύει $e \circ \hat{h} = h$ από τον ορισμό, και η μοναδικότητα προκύπτει όπως στην Άσκηση 9.1, αφού η e είναι έρριψη.

iv. Το (E, e) ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα, άρα είναι εξισωτής των T και S στη $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$. □

9.11 - Pullback στη Grp

i. Το $G \times_K H$ είναι υποομάδα του $G \times H$.

- *Ουδέτερο.* $\varphi(e_G) = e_K = \psi(e_H)$, άρα $(e_G, e_H) \in G \times_K H$.
- *Κλειστότητα.* Αν $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times_K H$, τότε

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) = \psi(h_1)\psi(h_2) = \psi(h_1 h_2),$$

  άρα $(g_1 g_2, h_1 h_2) \in G \times_K H$.
- *Αντίστροφα.* Αν $(g, h) \in G \times_K H$, τότε $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1} = \psi(h)^{-1} = \psi(h^{-1})$, άρα $(g^{-1}, h^{-1}) \in G \times_K H$.

ii. Για $(g, h) \in G \times_K H$ έχουμε $(\varphi \circ p_1)(g, h) = \varphi(g) = \psi(h) = (\psi \circ p_2)(g, h)$, από τον ορισμό του $G \times_K H$.

iii. Ο $u(x) = (h_1(x), h_2(x))$ παίρνει τιμές στο $G \times_K H$, αφού $\varphi(h_1(x)) = \psi(h_2(x))$ από την υπόθεση $\varphi \circ h_1 = \psi \circ h_2$. Η πράξη είναι κατά συνιστώσα και οι h_1, h_2 είναι ομομορφισμοί, άρα

$$u(xy) = \big(h_1(x)h_1(y),\ h_2(x)h_2(y)\big) = u(x)\,u(y).$$

Επίσης $p_1(u(x)) = h_1(x)$ και $p_2(u(x)) = h_2(x)$.

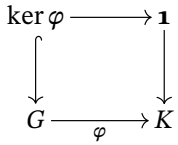
iv. Αν $\circ\, u' : X \to G \times_K H$ ικανοποιεί $p_1 \circ u' = h_1$ και $p_2 \circ u' = h_2$, τότε και οι δύο συντεταγμένες του $u'(x)$ είναι καθορισμένες, οπότε $u'(x) = (h_1(x), h_2(x)) = u(x)$. Άρα η τριάδα $(G \times_K H, p_1, p_2)$ είναι pullback των φ και ψ στη **Grp**. □

v. Για $H = \mathbf{1} = \{e\}$ ο ψ στέλνει το e στο e_K, και

$$G \times_K \mathbf{1} = \{(g, e) \in G \times \mathbf{1} \mid \varphi(g) = e_K\}.$$

Η αντιστοιχία $(g, e) \mapsto g$ είναι ισομορφισμός ομάδων από το $G \times_K \mathbf{1}$ στον πυρήνα $\ker\varphi$, και μεταφέρει την προβολή p_1 στην εμφύτευση $\ker\varphi \hookrightarrow G$. Το

pullback κατά μήκος του μοναδικού ομομορφισμού $\mathbf{1} \to K$ είναι επομένως ο πυρήνας του φ.



9.12 - Pullback στη Vect

i. Το $(0,0)$ ανήκει στο $V \times_W U$, αφού $T(0) = 0 = S(0)$. Αν $(v,u),(v',u') \in V \times_W U$ και $\lambda \in \mathbb{F}$, τότε

$$T(v+v') = T(v) + T(v') = S(u) + S(u') = S(u+u'),$$
$$T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda S(u) = S(\lambda u).$$

Άρα το $V \times_W U$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό, δηλαδή υπόχωρος του $V \times U$.

ii. Οι p_1 και p_2 είναι οι περιορισμοί στο $V \times_W U$ των προβολών του $V \times U$, που είναι γραμμικές, άρα είναι γραμμικές. Για $(v,u) \in V \times_W U$ έχουμε $(T \circ p_1)(v,u) = T(v) = S(u) = (S \circ p_2)(v,u)$.

iii. Για κάθε $x \in X$ ισχύει $T(h_1(x)) = S(h_2(x))$, άρα $\hat{h}(x) = (h_1(x), h_2(x)) \in V \times_W U$ και η $\hat{h}$ είναι καλά ορισμένη. Οι πράξεις είναι κατά συνιστώσα και οι h_1, h_2 είναι γραμμικές, άρα

$$\hat{h}(\lambda x + y) = \big(\lambda h_1(x) + h_1(y),\ \lambda h_2(x) + h_2(y)\big) = \lambda \hat{h}(x) + \hat{h}(y).$$

Επίσης $p_1(\hat{h}(x)) = h_1(x)$ και $p_2(\hat{h}(x)) = h_2(x)$.

iv. Αν η γραμμική $\hat{h}'$ ικανοποιεί $p_1 \circ \hat{h}' = h_1$ και $p_2 \circ \hat{h}' = h_2$, τότε οι δύο συντεταγμένες του $\hat{h}'(x)$ είναι οι $h_1(x)$ και $h_2(x)$, άρα $\hat{h}' = \hat{h}$. Η τριάδα $(V \times_W U, p_1, p_2)$ είναι επομένως pullback των T και S στη $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$. □

v. Για $U = 0$ και $S = 0$ έχουμε

$$V \times_W 0 = \{(v,0) \in V \times 0 \mid T(v) = 0\}.$$

Η αντιστοιχία $(v,0) \mapsto v$ είναι γραμμικός ισομορφισμός προς τον πυρήνα $\ker T$, και μεταφέρει την p_1 στην εμφύτευση $\ker T \hookrightarrow V$. Το pullback κατά μήκος της μοναδικής απεικόνισης $0 \to W$ είναι λοιπόν ο πυρήνας της T.

Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με εκείνο της Άσκησης 9.11(v). Και στις δύο κατηγορίες το pullback κατά μήκος του μορφισμού που ξεκινά από το μηδενικό αντικείμενο, την τετριμμένη ομάδα $\mathbf{1}$ ή τον μηδενικό χώρο 0, δίνει τον πυρήνα. Η κατηγορική κατασκευή είναι κοινή, και μόνο η εσωτερική δομή των αντικειμένων αλλάζει.

9.13 - Εξισωτής και ισομορφισμός

i. Από τον ορισμό του εξισωτή ισχύει $f \circ e = g \circ e$. Ο e είναι επιμορφισμός, δηλαδή απαλείφεται από δεξιά. Για κάθε ζεύγος μορφισμών k, l με πηγή το A, η $k \circ e = l \circ e$ συνεπάγεται $k = l$. Με $k = f$ και $l = g$ παίρνουμε $f = g$. □

Η απόδειξη χρησιμοποίησε μόνο ότι ο e είναι επιμορφισμός. Στη **Set**, όπου οι επιμορφισμοί είναι οι επιρρίψεις, το επιχείρημα διαβάζεται και με στοιχεία. Κάθε $a \in A$ γράφεται $a = e(x)$, οπότε $f(a) = f(e(x)) = g(e(x)) = g(a)$.

ii. Κάθε ισομορφισμός είναι επιμορφισμός, άρα από το (i) $f = g$.

Ισχύει και το αντίστροφο. Αν $f = g$, τότε το (A, id_A) είναι εξισωτής των f και g, αφού κάθε $h : X \to A$ διέρχεται μοναδικά μέσω του id_A. Από την Άσκηση 9.14 κάθε άλλος εξισωτής είναι ισόμορφος με αυτόν μέσω ισομορφισμού συμβατού με τους μορφισμούς προς το A, οπότε και ο ίδιος είναι ισομορφισμός. Ο εξισωτής δύο διαφορετικών μορφισμών δεν είναι λοιπόν ποτέ ισομορφισμός.

9.14 - Μοναδικότητα εξισωτή

i. Ο $e' : E' \to A$ ικανοποιεί $f \circ e' = g \circ e'$. Από την καθολική ιδιότητα του (E, e) υπάρχει μοναδικός $u : E' \to E$ με $e \circ u = e'$.

ii. Συμμετρικά, από την καθολική ιδιότητα του (E', e') εφαρμοσμένη στον e υπάρχει μοναδικός $v : E \to E'$ με $e' \circ v = e$.

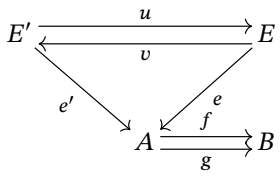
iii. Για τη σύνθεση $u \circ v : E \to E$ έχουμε

$$e \circ (u \circ v) = (e \circ u) \circ v = e' \circ v = e = e \circ \mathrm{id}_E.$$

Ο e ικανοποιεί $f \circ e = g \circ e$, οπότε από την καθολική ιδιότητα του (E, e) υπάρχει μοναδικός μορφισμός $w : E \to E$ με $e \circ w = e$. Τόσο ο $u \circ v$ όσο και ο id_E έχουν αυτή την ιδιότητα, άρα $u \circ v = \mathrm{id}_E$. Συμμετρικά, $v \circ u = \mathrm{id}_{E'}$.

Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει και από την Πρόταση 9.1. Ο e είναι μονομορφισμός, οπότε από την $e \circ (u \circ v) = e \circ \mathrm{id}_E$ απαλείφεται από αριστερά.

iv. Ο u είναι ισομορφισμός με αντίστροφο τον v και ικανοποιεί $e \circ u = e'$, δηλαδή σέβεται τους μορφισμούς προς το A. Ο εξισωτής είναι επομένως μοναδικός ως προς ισομορφισμό. □



9.15 - Μοναδικότητα pullback

i. Ισχύει $f \circ p_1' = g \circ p_2'$. Από την καθολική ιδιότητα του (P, p_1, p_2) υπάρχει μοναδικός $u : P' \to P$ με $p_1 \circ u = p_1'$ και $p_2 \circ u = p_2'$.

ii. Συμμετρικά, από την καθολική ιδιότητα του (P', p_1', p_2') υπάρχει μοναδικός $v : P \to P'$ με $p_1' \circ v = p_1$ και $p_2' \circ v = p_2$.

iii. Η σύνθεση $v \circ u$ είναι μορφισμός $P' \to P'$, και

$$p_1' \circ (v \circ u) = (p_1' \circ v) \circ u = p_1 \circ u = p_1', \qquad p_2' \circ (v \circ u) = p_2 \circ u = p_2'.$$

Ο $\mathrm{id}_{P'}$ ικανοποιεί τις ίδιες δύο ισότητες. Η καθολική ιδιότητα του (P', p_1', p_2'), εφαρμοσμένη στο ζεύγος (p_1', p_2'), δίνει μοναδικό μορφισμό με αυτές τις ιδιότητες, άρα $v \circ u = \mathrm{id}_{P'}$. Με τον ίδιο υπολογισμό για τη σύνθεση $u \circ v : P \to P$,

$$p_1 \circ (u \circ v) = p_1' \circ v = p_1, \qquad p_2 \circ (u \circ v) = p_2' \circ v = p_2,$$

και από τη μοναδικότητα στην καθολική ιδιότητα του (P, p_1, p_2) παίρνουμε $u \circ v = \mathrm{id}_P$.

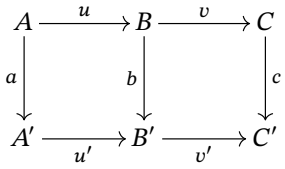
iv. Ο $u : P' \to P$ είναι ισομορφισμός με αντίστροφο τον v, και από το (i) σέβεται τις προβολές. Το pullback είναι επομένως μοναδικό ως προς ισομορφισμό. □

v. Και οι δύο αποδείξεις ακολουθούν το ίδιο σχήμα. Εφαρμόζουμε την καθολική ιδιότητα δύο φορές, μία για κάθε αντικείμενο, και παίρνουμε μορφισμούς σε αντίθετες κατευθύνσεις. Κάθε σύνθεσή τους ικανοποιεί τις ίδιες σχέσεις με την ταυτοτική, οπότε από τη μοναδικότητα ταυτίζεται μαζί της. Το σχήμα το συναντήσαμε ήδη στην Πρόταση 8.1 για το γινόμενο και στην Άσκηση 8.6 για το συν-γινόμενο. Ισχύει αυτούσιο για κάθε κατασκευή που ορίζεται με καθολική

ιδιότητα, γιατί χρησιμοποιεί μόνο την ύπαρξη και τη μοναδικότητα του επαγόμενου μορφισμού.

9.16 - Λήμμα των δύο τετραγώνων

Το αριστερό τετράγωνο αντιμετατίθεται, δηλαδή $b \circ u = u' \circ a$, και το δεξιό επίσης, δηλαδή $c \circ v = v' \circ b$.



Με τη γλώσσα του Ορισμού 9.2, το δεξιό τετράγωνο είναι pullback όταν η τριάδα (B, b, v) είναι pullback των v' και c, το αριστερό όταν η (A, a, u) είναι pullback των u' και b, και το εξωτερικό ορθογώνιο όταν η $(A, a, v \circ u)$ είναι pullback των $v' \circ u'$ και c.

i. Χρησιμοποιώντας διαδοχικά τα δύο τετράγωνα,

$$c \circ (v \circ u) = (c \circ v) \circ u = v' \circ (b \circ u) = v' \circ (u' \circ a) = (v' \circ u') \circ a.$$

ii. Έστω ότι και τα δύο τετράγωνα είναι pullbacks, και έστω $x : X \to A'$, $y : X \to C$ με $(v' \circ u') \circ x = c \circ y$.

Ύπαρξη. Το ζεύγος $(u' \circ x, y)$ ικανοποιεί $v' \circ (u' \circ x) = c \circ y$, οπότε από το δεξιό pullback υπάρχει μοναδικός $z : X \to B$ με $b \circ z = u' \circ x$ και $v \circ z = y$. Στη συνέχεια το ζεύγος (x, z) ικανοποιεί $u' \circ x = b \circ z$, οπότε από το αριστερό pullback υπάρχει μοναδικός $w : X \to A$ με $a \circ w = x$ και $u \circ w = z$. Τότε $(v \circ u) \circ w = v \circ z = y$.

Μοναδικότητα. Έστω $w' : X \to A$ με $a \circ w' = x$ και $(v \circ u) \circ w' = y$. Ο $z' = u \circ w'$ ικανοποιεί $b \circ z' = u' \circ a \circ w' = u' \circ x$ και $v \circ z' = y$, άρα $z' = z$ από τη μοναδικότητα στο δεξιό pullback. Ο w' ικανοποιεί λοιπόν $a \circ w' = x$ και $u \circ w' = z$, άρα $w' = w$ από τη μοναδικότητα στο αριστερό pullback. Το εξωτερικό ορθογώνιο είναι pullback. □

iii. Έστω ότι το δεξιό τετράγωνο και το εξωτερικό ορθογώνιο είναι pullbacks, και έστω $x : X \to A'$, $z : X \to B$ με $u' \circ x = b \circ z$.

Ύπαρξη. Το ζεύγος $(x, v \circ z)$ ικανοποιεί

$$(v' \circ u') \circ x = v' \circ b \circ z = c \circ (v \circ z),$$

οπότε από το εξωτερικό pullback υπάρχει μοναδικός $w : X \to A$ με $a \circ w = x$ και $(v \circ u) \circ w = v \circ z$. Μένει να δείξουμε ότι $u \circ w = z$. Οι μορφισμοί $u \circ w$ και z έχουν στόχο το B, και

$$b \circ (u \circ w) = u' \circ a \circ w = u' \circ x = b \circ z, \qquad v \circ (u \circ w) = v \circ z.$$

Έχουν δηλαδή τις ίδιες συνθέσεις με τους b και v, οπότε από τη μοναδικότητα στο δεξιό pullback, εφαρμοσμένη στο ζεύγος $(b \circ z, v \circ z)$, παίρνουμε $u \circ w = z$.

Μοναδικότητα. Αν $\circ\, w' : X \to A$ ικανοποιεί $a \circ w' = x$ και $u \circ w' = z$, τότε ικανοποιεί και $(v \circ u) \circ w' = v \circ z$, άρα $w' = w$ από τη μοναδικότητα στο εξωτερικό pullback. Το αριστερό τετράγωνο είναι pullback. □

iv. Θέτουμε $A = A' = B = \varnothing$ και $B' = C = C' = \{*\}$. Όλοι οι μορφισμοί είναι οι μοναδικοί δυνατοί, και τα δύο τετράγωνα αντιμετατίθενται, αφού κάθε δύο συναρτήσεις με πηγή το $\varnothing$ είναι ίσες.

Από την Άσκηση 9.5, το pullback των $u' : \varnothing \to \{*\}$ και $b : \varnothing \to \{*\}$ είναι υποσύνολο του $\varnothing \times \varnothing = \varnothing$, άρα το αριστερό τετράγωνο, με $A = \varnothing$, είναι pullback. Ομοίως το pullback των $v' \circ u' : \varnothing \to \{*\}$ και $c : \{*\} \to \{*\}$ είναι υποσύνολο του $\varnothing \times \{*\} = \varnothing$, άρα και το εξωτερικό ορθογώνιο είναι pullback.

Το pullback των $v' : \{*\} \to \{*\}$ και $c : \{*\} \to \{*\}$ είναι όμως το μονοσύνολο $\{(*, *)\}$. Το $B = \varnothing$ δεν είναι ισόμορφο με αυτό, άρα το δεξιό τετράγωνο δεν είναι pullback. Πιο άμεσα, για $X = \{*\}$ με τις ταυτοτικές προς τα B' και C δεν υπάρχει καμία συνάρτηση $X \to \varnothing$.

Γιατί λειτουργεί η υπόδειξη; Όταν το A' είναι κενό, κάθε τετράγωνο με κορυφή $A = \varnothing$ πάνω από το A' είναι αυτόματα pullback, ό,τι κι αν συμβαίνει στο δεξιό μέρος. Το (iii) δεν αντιστρέφεται λοιπόν. Η υπόθεση ότι το δεξιό τετράγωνο είναι pullback δεν μπορεί να παραλειφθεί.

9.17 - Pushout στη Set

Γράφουμε τα στοιχεία του $A \sqcup B$ ως $(a, 0)$ και $(b, 1)$, όπως στο Κεφάλαιο 8. Η σχέση $f(c) \sim g(c)$ σημαίνει $(f(c), 0) \sim (g(c), 1)$, και $q_1(a) = [(a, 0)]$, $q_2(b) = [(b, 1)]$.

i. Για κάθε $c \in C$ έχουμε $q_1(f(c)) = [(f(c), 0)] = [(g(c), 1)] = q_2(g(c))$, άρα $q_1 \circ f = q_2 \circ g$.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $H = [h_1, h_2] : A \sqcup B \to X$ της Άσκησης 8.3, με $H((a,0)) = h_1(a)$ και $H((b,1)) = h_2(b)$, και ορίζουμε

$$u : Q \to X, \qquad u([z]) = H(z).$$

Καλή ορισιμότητα. Πρέπει να δείξουμε ότι $z \sim z'$ συνεπάγεται $H(z) = H(z')$. Ορίζουμε στο $A \sqcup B$ τη σχέση $z \approx z'$ όταν $H(z) = H(z')$. Είναι σχέση ισοδυναμίας και περιέχει τα ζεύγη που γεννούν την $\sim$, αφού

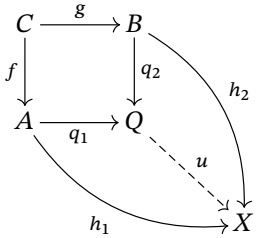
$$H((f(c),0)) = h_1(f(c)) = h_2(g(c)) = H((g(c),1))$$

από την υπόθεση $h_1 \circ f = h_2 \circ g$. Η $\sim$ είναι η ελάχιστη σχέση ισοδυναμίας με αυτή την ιδιότητα, άρα περιέχεται στην $\approx$. Επομένως η u είναι καλά ορισμένη.

Οι δύο ισότητες. Για $a \in A$ έχουμε $u(q_1(a)) = H((a,0)) = h_1(a)$, άρα $u \circ q_1 = h_1$, και ομοίως $u \circ q_2 = h_2$.

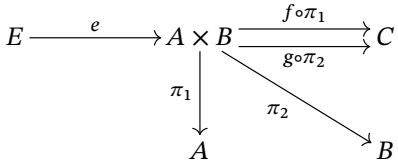
Μοναδικότητα. Αν η $u' : Q \to X$ ικανοποιεί $u' \circ q_1 = h_1$ και $u' \circ q_2 = h_2$, τότε $u'([(a,0)]) = h_1(a) = u([(a,0)])$ και ομοίως για τις κλάσεις $[(b,1)]$. Κάθε στοιχείο του Q είναι κλάση της μίας ή της άλλης μορφής, άρα $u' = u$.

iii. Η τριάδα (Q, q_1, q_2) ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα, άρα είναι pushout των f και g στη **Set**. □



9.18 - Pullback από εξισωτή

i. Θέτουμε $p_1 = \pi_1 \circ e$ και $p_2 = \pi_2 \circ e$.



Αντιμεταθετικότητα. Από τον ορισμό του εξισωτή,

$$f \circ p_1 = (f \circ \pi_1) \circ e = (g \circ \pi_2) \circ e = g \circ p_2.$$

Ύπαρξη. Έστω $h_1 : X \to A$ και $h_2 : X \to B$ με $f \circ h_1 = g \circ h_2$. Ο $k = \langle h_1, h_2 \rangle : X \to A \times B$ ικανοποιεί

$$(f \circ \pi_1) \circ k = f \circ h_1 = g \circ h_2 = (g \circ \pi_2) \circ k,$$

οπότε από την καθολική ιδιότητα του εξισωτή υπάρχει μοναδικός $u : X \to E$ με $e \circ u = k$. Τότε $p_1 \circ u = \pi_1 \circ k = h_1$ και $p_2 \circ u = \pi_2 \circ k = h_2$.

Μοναδικότητα. Έστω $u' : X \to E$ με $p_1 \circ u' = h_1$ και $p_2 \circ u' = h_2$. Τότε $\pi_1 \circ (e \circ u') = h_1$ και $\pi_2 \circ (e \circ u') = h_2$, οπότε από την Άσκηση 8.2(iii) $e \circ u' = \langle h_1, h_2 \rangle = k$. Από τη μοναδικότητα στην καθολική ιδιότητα του εξισωτή, $u' = u$.

Άρα το E με τους $\pi_1 \circ e$ και $\pi_2 \circ e$ είναι pullback των f και g. Αυτό είναι το περιεχόμενο της Πρότασης 9.2. Στη **Set** ο εξισωτής είναι το υποσύνολο $\{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\}$, δηλαδή ακριβώς το P της Άσκησης 9.5. □

ii. Έστω τυχαίοι $f : A \to C$ και $g : B \to C$. Η $\mathcal{C}$ έχει το γινόμενο $A \times B$ και τον εξισωτή των $f \circ \pi_1$ και $g \circ \pi_2$, οπότε από το (i) έχει και το pullback των f και g. □

9.19 - Εξισωτής από pullback

i. Από την καθολική ιδιότητα του γινομένου $B \times B$ ο $\langle f, g \rangle : A \to B \times B$ είναι ο μοναδικός μορφισμός με $\pi_1 \circ \langle f, g \rangle = f$ και $\pi_2 \circ \langle f, g \rangle = g$.

ii. Το pullback του διαγράμματος $A \xrightarrow{\langle f,g \rangle} B \times B \xleftarrow{\Delta_B} B$ είναι το τετράγωνο

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\ d\ } & B \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Delta_B} \\ A & \xrightarrow[\langle f,g \rangle]{} & B \times B \end{array}$$

με $\langle f, g \rangle \circ p = \Delta_B \circ d$.

iii. Συνθέτουμε την ισότητα του τετραγώνου με τις π_1 και π_2 και χρησιμοποιούμε ότι $\pi_1 \circ \Delta_B = \pi_2 \circ \Delta_B = \mathrm{id}_B$.

$$f \circ p = \pi_1 \circ \langle f, g\rangle \circ p = \pi_1 \circ \Delta_B \circ d = d,$$
$$g \circ p = \pi_2 \circ \langle f, g\rangle \circ p = \pi_2 \circ \Delta_B \circ d = d.$$

Άρα $f \circ p = d = g \circ p$.

iv. Έστω $h : X \to A$ με $f \circ h = g \circ h$, και $k = f \circ h = g \circ h : X \to B$. Από την Άσκηση 8.2(ii),

$$\langle f, g\rangle \circ h = \langle f \circ h,\ g \circ h\rangle = \langle k, k\rangle = \langle \mathrm{id}_B, \mathrm{id}_B\rangle \circ k = \Delta_B \circ k.$$

Το ζεύγος (h, k) συμφωνεί λοιπόν πάνω στο $B \times B$, και από την καθολική ιδιότητα του pullback υπάρχει μοναδικός $\hat{h} : X \to P$ με $p \circ \hat{h} = h$ και $d \circ \hat{h} = k$.

Μοναδικότητα ως προς τη μία συνθήκη. Η άσκηση ζητά μοναδικότητα μόνο ως προς την $p \circ \hat{h} = h$. Αν $\circ\, \hat{h}' : X \to P$ ικανοποιεί $p \circ \hat{h}' = h$, τότε από το (iii)

$$d \circ \hat{h}' = f \circ p \circ \hat{h}' = f \circ h = k,$$

οπότε ο $\hat{h}'$ ικανοποιεί και τις δύο συνθήκες του pullback, και $\hat{h}' = \hat{h}$. Η δεύτερη συνθήκη προκύπτει αυτόματα από την πρώτη.

v. Από το (iii) ισχύει $f \circ p = g \circ p$, και από το (iv) κάθε h με $f \circ h = g \circ h$ διέρχεται μοναδικά μέσω του p. Άρα το (P, p) είναι εξισωτής των f και g, και μια κατηγορία με γινόμενα και pullbacks έχει και εξισωτές. □

Στη **Set** έχουμε $P = \{(a, b) \in A \times B \mid (f(a), g(a)) = (b, b)\}$, και η αντιστοιχία $(a, b) \mapsto a$ το ταυτίζει με το $\{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$ της Άσκησης 9.1.

Σύγκριση με την Άσκηση 9.18. Οι δύο ασκήσεις δεν είναι δυϊκές μεταξύ τους. Δυϊκό του εξισωτή είναι ο συνεξισωτής, και δυϊκό του pullback το pushout. Αυτό που δείχνουν μαζί είναι ότι, παρουσία γινομένων, οι εξισωτές και τα pullbacks κατασκευάζονται το ένα από το άλλο μέσα στην ίδια κατηγορία. Η Άσκηση 9.18 χτίζει το pullback ως εξισωτή των δύο σύνθετων μορφισμών $f \circ \pi_1, g \circ \pi_2 : A \times B \to C$. Η παρούσα άσκηση χτίζει τον εξισωτή ως pullback του $\langle f, g\rangle$ κατά μήκος του διαγώνιου μορφισμού Δ_B, ο οποίος εκφράζει τη συνθήκη «οι δύο τιμές είναι ίσες» στη γλώσσα των βελών.