Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 8

8.1 - Υπολογισμός σε Set

i. Γράφουμε $A \sqcup B = \big(A \times \{0\}\big) \cup \big(B \times \{1\}\big)$. Η $[f, g]$ ορίζεται με ανάλυση περιπτώσεων,

$$[f, g](z) = \begin{cases} f(a), & z = (a, 0), \\ g(b), & z = (b, 1). \end{cases}$$

Στα πέντε στοιχεία του $A \sqcup B$ παίρνουμε τον πίνακα

z	$(1,0)$	$(2,0)$	$(3,0)$	$(a,1)$	$(b,1)$
$[f,g](z)$	x	y	x	x	y

ii. Η $\langle f', g' \rangle : X \to A \times B$ δίνεται από τον τύπο $t \mapsto (f'(t), g'(t))$, άρα

$$\langle f', g' \rangle(p) = (2, b), \qquad \langle f', g' \rangle(q) = (1, a).$$

Για την επαλήθευση υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} (\pi_1 \circ \langle f', g' \rangle)(p) &= \pi_1(2, b) = 2 = f'(p), \\ (\pi_1 \circ \langle f', g' \rangle)(q) &= \pi_1(1, a) = 1 = f'(q), \\ (\pi_2 \circ \langle f', g' \rangle)(p) &= \pi_2(2, b) = b = g'(p), \\ (\pi_2 \circ \langle f', g' \rangle)(q) &= \pi_2(1, a) = a = g'(q). \end{aligned}$$

iii. Ισχύει $|A \times B| = 3 \cdot 2 = 6$ και $|X| = 2$, άρα υπάρχουν $6^2 = 36$ συναρτήσεις $h : X \to A \times B$. Από αυτές ακριβώς μία ικανοποιεί ταυτόχρονα $\pi_1 \circ h = f'$ και $\pi_2 \circ h = g'$. Η πρώτη συντεταγμένη του $h(p)$ πρέπει να είναι $f'(p) = 2$ και η δεύτερη $g'(p) = b$, οπότε $h(p) = (2, b)$, και ομοίως $h(q) = (1, a)$.

Το πλήθος 36 μετρά όλες τις συναρτήσεις προς το $A \times B$, ενώ το πλήθος 1 μετρά όσες είναι συμβατές με το δοσμένο ζεύγος (f', g'). Η μοναδικότητα της καθολικής ιδιότητας εκφράζει ακριβώς αυτό. Οι δύο συνθέσεις με τις προβολές καθορίζουν πλήρως τη συνάρτηση και δεν αφήνουν κανένα περιθώριο επιλογής.

8.2 - Ο μορφισμός $\langle f, g \rangle$

Και στα τρία ερωτήματα χρησιμοποιούμε το ίδιο εργαλείο. Ένας μορφισμός προς το $A \times B$ που ικανοποιεί τις δύο εξισώσεις ενός ζεύγους (f, g) συμπίπτει με τον $\langle f, g \rangle$, λόγω της μοναδικότητας στην καθολική ιδιότητα.

i. Ο $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle$ είναι ο μοναδικός μορφισμός $u : A \times B \to A \times B$ με $\pi_1 \circ u = \pi_1$ και $\pi_2 \circ u = \pi_2$. Ο $\mathrm{id}_{A\times B}$ ικανοποιεί αυτές τις δύο ισότητες, άρα $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = \mathrm{id}_{A\times B}$.

ii. Ο $\langle f, g \rangle \circ k$ είναι μορφισμός $Y \to A \times B$ και ισχύει

$$\pi_1 \circ \big(\langle f, g \rangle \circ k\big) = \big(\pi_1 \circ \langle f, g \rangle\big) \circ k = f \circ k, \qquad \pi_2 \circ \big(\langle f, g \rangle \circ k\big) = g \circ k.$$

Ο $\langle f \circ k,\ g \circ k \rangle$ είναι ο μοναδικός μορφισμός $Y \to A \times B$ με αυτές τις δύο ιδιότητες, άρα $\langle f, g \rangle \circ k = \langle f \circ k,\ g \circ k \rangle$.

iii. Αν $h_1 = h_2$, οι δύο ισότητες ισχύουν προφανώς. Αντιστρόφως, έστω ότι $\pi_1 \circ h_1 = \pi_1 \circ h_2$ και $\pi_2 \circ h_1 = \pi_2 \circ h_2$. Θέτουμε $f = \pi_1 \circ h_1$ και $g = \pi_2 \circ h_1$. Τότε και ο h_1 και ο h_2 ικανοποιούν τις εξισώσεις $\pi_1 \circ h = f$ και $\pi_2 \circ h = g$, οπότε από τη μοναδικότητα $h_1 = \langle f, g \rangle = h_2$. □

Το (iii) λέει ότι οι προβολές π_1, π_2 διακρίνουν από κοινού τους μορφισμούς προς το γινόμενο. Το χρησιμοποιούμε επανειλημμένα στις επόμενες ασκήσεις, κάθε φορά που συγκρίνουμε δύο μορφισμούς με στόχο ένα γινόμενο.

8.3 - Ο μορφισμός $[f, g]$

Ορίζουμε την $[f, g] : A \sqcup B \to C$ με ανάλυση περιπτώσεων,

$$[f, g]\big((a, 0)\big) = f(a), \qquad [f, g]\big((b, 1)\big) = g(b).$$

Κάθε στοιχείο του $A \sqcup B$ έχει ακριβώς μία από τις δύο μορφές, άρα η $[f, g]$ είναι καλά ορισμένη.

Οι δύο ισότητες. Οι εγκλεισμοί είναι $\iota_1(a) = (a, 0)$ και $\iota_2(b) = (b, 1)$. Για κάθε $a \in A$ έχουμε

$$([f, g] \circ \iota_1)(a) = [f, g]\big((a, 0)\big) = f(a),$$

άρα $[f, g] \circ \iota_1 = f$. Ομοίως $[f, g] \circ \iota_2 = g$.

Μοναδικότητα. Έστω $h : A \sqcup B \to C$ με $h \circ \iota_1 = f$ και $h \circ \iota_2 = g$. Κάθε $z \in A \sqcup B$ είναι είτε $(a, 0) = \iota_1(a)$ είτε $(b, 1) = \iota_2(b)$. Στην πρώτη περίπτωση

$$h(z) = h(\iota_1(a)) = f(a) = [f, g](z),$$

και στη δεύτερη ομοίως $h(z) = g(b) = [f, g](z)$. Άρα $h = [f, g]$. □

8.4 - Τελικό αντικείμενο και γινόμενο

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\theta : A \to A \times \{*\}, \qquad \theta(a) = (a, *).$$

Η προβολή $\pi_1 : A \times \{*\} \to A$ είναι αντίστροφή της. Πράγματι, $\pi_1(\theta(a)) = a$ για κάθε $a \in A$, και $\theta(\pi_1(a, *)) = (a, *)$ για κάθε στοιχείο του $A \times \{*\}$, αφού η δεύτερη συντεταγμένη δεν μπορεί να είναι άλλη από το $*$. Άρα $A \times \{*\} \cong A$. □

Το δυϊκό αποτέλεσμα. Αναστρέφοντας τα βέλη, το γινόμενο γίνεται συν-γινόμενο και το τελικό αντικείμενο γίνεται αρχικό. Το $\{*\}$ είναι τελικό αντικείμενο της **Set**, ενώ αρχικό αντικείμενο είναι το κενό σύνολο. Η δυϊκή δήλωση είναι επομένως

$$A \sqcup \varnothing \cong A.$$

Η επαλήθευση είναι άμεση. Έχουμε $A \sqcup \varnothing = \big(A \times \{0\}\big) \cup \big(\varnothing \times \{1\}\big) = A \times \{0\}$, και ο εγκλεισμός $\iota_1(a) = (a, 0)$ είναι αμφίρριψη. Τον ρόλο του $\{*\}$ τον παίζει το $\varnothing$. Η απόδειξη σε τυχαία κατηγορία δίνεται στην Άσκηση 8.11.

8.5 - Γινόμενο και συν-γινόμενο στη διαιρετότητα

Στην $(\mathbb{N}, |)$ κάθε Hom-σύνολο έχει το πολύ ένα στοιχείο. Επομένως η μοναδικότητα του επαγόμενου μορφισμού και η αντιμεταθετικότητα των διαγραμμάτων ισχύουν αυτόματα, και η καθολική ιδιότητα ανάγεται στην ύπαρξη βελών.

Γινόμενο. Ένα αντικείμενο P με βέλη $P \to m$ και $P \to n$ είναι κοινός διαιρέτης των m και n, δηλαδή $P \mid m$ και $P \mid n$. Η καθολική ιδιότητα απαιτεί για κάθε κοινό διαιρέτη C να υπάρχει βέλος $C \to P$, δηλαδή $C \mid P$. Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης έχει ακριβώς αυτές τις δύο ιδιότητες. Είναι κοινός διαιρέτης, και κάθε κοινός διαιρέτης τον διαιρεί. Άρα

$$m \times n = \gcd(m, n).$$

Συν-γινόμενο. Δυϊκά, ένα αντικείμενο Q με βέλη $m \to Q$ και $n \to Q$ είναι κοινό πολλαπλάσιο, και η καθολική ιδιότητα απαιτεί $Q \mid D$ για κάθε κοινό πολλαπλάσιο D. Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο είναι κοινό πολλαπλάσιο και διαιρεί κάθε κοινό πολλαπλάσιο. Άρα

$$m + n = \operatorname{lcm}(m, n).$$

Αν στο $\mathbb{N}$ περιλαμβάνεται το 0, οι τύποι παραμένουν σωστοί με τις συμβάσεις $\gcd(m, 0) = m$ και $\operatorname{lcm}(m, 0) = 0$. Κάθε αριθμός διαιρεί το 0, οπότε το 0 είναι το τελικό αντικείμενο της κατηγορίας, ενώ το 1 είναι το αρχικό.

8.6 - Μοναδικότητα ως προς ισομορφισμό

Έστω (Q, ι_1, ι_2) και (Q', ι_1', ι_2') δύο συν-γινόμενα των A και B.

Εφαρμόζουμε την καθολική ιδιότητα του Q στο ζεύγος $\iota_1' : A \to Q'$, $\iota_2' : B \to Q'$. Υπάρχει μοναδικός $\varphi : Q \to Q'$ με

$$\varphi \circ \iota_1 = \iota_1', \qquad \varphi \circ \iota_2 = \iota_2'.$$

Συμμετρικά, από την καθολική ιδιότητα του Q' υπάρχει μοναδικός $\psi : Q' \to Q$ με

$$\psi \circ \iota_1' = \iota_1, \qquad \psi \circ \iota_2' = \iota_2.$$

Για τη σύνθεση $\psi \circ \varphi : Q \to Q$ έχουμε

$$(\psi \circ \varphi) \circ \iota_1 = \psi \circ \iota_1' = \iota_1 = \mathrm{id}_Q \circ \iota_1,$$

και ομοίως $(\psi \circ \varphi) \circ \iota_2 = \iota_2 = \mathrm{id}_Q \circ \iota_2$. Οι μορφισμοί $\psi \circ \varphi$ και id_Q ικανοποιούν και οι δύο τις εξισώσεις της καθολικής ιδιότητας του Q για το ζεύγος (ι_1, ι_2), άρα από τη μοναδικότητα

$$\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_Q.$$

Συμμετρικά, $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{Q'}$. Ο φ είναι επομένως ισομορφισμός. Είναι και ο μοναδικός ισομορφισμός με $\varphi \circ \iota_1 = \iota_1'$ και $\varphi \circ \iota_2 = \iota_2'$, αφού ήδη ως μορφισμός με αυτές τις δύο ιδιότητες είναι μοναδικός. □

8.7 - Αντιμεταθετικότητα γινομένου

Έστω $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$ και $(B \times A, \rho_1, \rho_2)$ τα δύο γινόμενα, με $\rho_1 : B \times A \to B$ και $\rho_2 : B \times A \to A$.

Το $A \times B$ διαθέτει τον μορφισμό π_2 προς το B και τον π_1 προς το A. Από την καθολική ιδιότητα του $B \times A$ υπάρχει μοναδικός

$$\sigma = \langle \pi_2, \pi_1 \rangle : A \times B \to B \times A, \qquad \rho_1 \circ \sigma = \pi_2, \quad \rho_2 \circ \sigma = \pi_1.$$

Συμμετρικά, από την καθολική ιδιότητα του $A \times B$ υπάρχει μοναδικός

$$\tau = \langle \rho_2, \rho_1 \rangle : B \times A \to A \times B, \qquad \pi_1 \circ \tau = \rho_2, \quad \pi_2 \circ \tau = \rho_1.$$

Για τη σύνθεση $\tau \circ \sigma : A \times B \to A \times B$ έχουμε

$$\pi_1 \circ (\tau \circ \sigma) = \rho_2 \circ \sigma = \pi_1, \qquad \pi_2 \circ (\tau \circ \sigma) = \rho_1 \circ \sigma = \pi_2.$$

Ο $\mathrm{id}_{A\times B}$ ικανοποιεί τις ίδιες δύο σχέσεις, άρα από την Άσκηση 8.2(iii) $\tau \circ \sigma = \mathrm{id}_{A\times B}$. Συμμετρικά, $\sigma \circ \tau = \mathrm{id}_{B\times A}$.

Άρα $A \times B \cong B \times A$. Η απόδειξη χρησιμοποίησε μόνο τις προβολές και τη μοναδικότητα, και πουθενά την εσωτερική δομή των αντικειμένων. □

8.8 - Δυϊκή αντιμεταθετικότητα

i. Αναστρέφουμε τα βέλη της Άσκησης 8.7. Οι προβολές γίνονται εγκλεισμοί, ο $\langle -, - \rangle$ γίνεται $[-, -]$, και η καθολική ιδιότητα του γινομένου γίνεται εκείνη του συν-γινομένου. Έστω $\iota_1 : A \to A + B$, $\iota_2 : B \to A + B$ οι εγκλεισμοί του $A + B$ και $\iota'_1 : B \to B + A$, $\iota'_2 : A \to B + A$ οι εγκλεισμοί του $B + A$. Θέτουμε

$$\sigma = [\iota'_2, \iota'_1] : A + B \to B + A, \qquad \tau = [\iota_2, \iota_1] : B + A \to A + B.$$

Τότε

$$(\tau \circ \sigma) \circ \iota_1 = \tau \circ \iota'_2 = \iota_1, \qquad (\tau \circ \sigma) \circ \iota_2 = \tau \circ \iota'_1 = \iota_2.$$

Ο id_{A+B} ικανοποιεί τις ίδιες σχέσεις, άρα από τη μοναδικότητα στην καθολική ιδιότητα του $A + B$ παίρνουμε $\tau \circ \sigma = \mathrm{id}_{A+B}$. Συμμετρικά, $\sigma \circ \tau = \mathrm{id}_{B+A}$. Άρα $A + B \cong B + A$ σε κάθε κατηγορία με συν-γινόμενα. □

ii. Στην **Set** ορίζουμε

$$\sigma : A \sqcup B \to B \sqcup A, \qquad \sigma\big((a, 0)\big) = (a, 1), \quad \sigma\big((b, 1)\big) = (b, 0).$$

Η σ αλλάζει μόνο την ετικέτα. Η $\tau : B \sqcup A \to A \sqcup B$ με $\tau\big((b, 0)\big) = (b, 1)$ και $\tau\big((a, 1)\big) = (a, 0)$ ικανοποιεί $\tau \circ \sigma = \mathrm{id}_{A\sqcup B}$ και $\sigma \circ \tau = \mathrm{id}_{B\sqcup A}$, άρα η σ είναι αμφίρριψη. Η σ συμπίπτει με τον $[\iota'_2, \iota'_1]$ του (i), αφού $\sigma \circ \iota_1 = \iota'_2$ και $\sigma \circ \iota_2 = \iota'_1$.

8.9 - Προσεταιριστικότητα γινομένου

Γράφουμε τις προβολές του $(A \times B) \times C$ ως $q_1 : (A \times B) \times C \to A \times B$ και $q_2 : (A \times B) \times C \to C$, και τις προβολές του $A \times B$ ως π_1, π_2. Ορίζουμε τις τρεις σύνθετες προβολές

$$p_A = \pi_1 \circ q_1, \qquad p_B = \pi_2 \circ q_1, \qquad p_C = q_2.$$

Ομοίως, για το $A\times(B\times C)$ γράφουμε $r_1 : A\times(B\times C) \to A$, $r_2 : A\times(B\times C) \to B\times C$, και ρ_1, ρ_2 τις προβολές του $B \times C$, με

$$p'_A = r_1, \qquad p'_B = \rho_1 \circ r_2, \qquad p'_C = \rho_2 \circ r_2.$$

Ένας μορφισμός προς το $(A \times B) \times C$ καθορίζεται από τις τρεις σύνθετες προβολές του. Έστω $h, h' : X \to (A \times B) \times C$ με $p_A \circ h = p_A \circ h'$, $p_B \circ h = p_B \circ h'$ και $p_C \circ h = p_C \circ h'$. Οι δύο πρώτες ισότητες δίνουν, από την Άσκηση 8.2(iii) για το $A \times B$, ότι $q_1 \circ h = q_1 \circ h'$. Μαζί με την τρίτη, $q_2 \circ h = q_2 \circ h'$, η ίδια άσκηση για το εξωτερικό γινόμενο δίνει $h = h'$. Το ίδιο ισχύει για το $A \times (B \times C)$ με τις p'_A, p'_B, p'_C.

Κατασκευή του α. Από την καθολική ιδιότητα του $B \times C$ παίρνουμε τον

$$\langle p_B, p_C \rangle : (A \times B) \times C \to B \times C,$$

και στη συνέχεια, από την καθολική ιδιότητα του $A \times (B \times C)$, τον

$$\alpha = \big\langle p_A,\ \langle p_B, p_C \rangle \big\rangle : (A \times B) \times C \to A \times (B \times C).$$

Από την κατασκευή, $p'_A \circ \alpha = p_A$, $p'_B \circ \alpha = p_B$ και $p'_C \circ \alpha = p_C$.

Κατασκευή του β. Συμμετρικά ορίζουμε

$$\beta = \big\langle \langle p'_A, p'_B \rangle,\ p'_C \big\rangle : A \times (B \times C) \to (A \times B) \times C,$$

με $p_A \circ \beta = p'_A$, $p_B \circ \beta = p'_B$ και $p_C \circ \beta = p'_C$.

Οι δύο συνθέσεις. Η $\beta \circ \alpha$ ικανοποιεί

$$p_A \circ (\beta \circ \alpha) = p'_A \circ \alpha = p_A, \qquad p_B \circ (\beta \circ \alpha) = p_B, \qquad p_C \circ (\beta \circ \alpha) = p_C.$$

Ο $\mathrm{id}_{(A\times B)\times C}$ ικανοποιεί τις ίδιες τρεις σχέσεις, άρα $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_{(A\times B)\times C}$. Συμμετρικά, $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_{A\times(B\times C)}$. Επομένως $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$. □

8.10 - Διαγώνιος μορφισμός

Ο δυϊκός του διαγώνιου $\Delta_A = \langle \mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A \rangle : A \to A \times A$ ορίζεται μέσω της καθολικής ιδιότητας του συν-γινομένου $A + A$, εφαρμοσμένης στο ζεύγος $(\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A)$. Είναι ο *συνδιαγώνιος μορφισμός*

$$\nabla_A = [\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A] : A + A \to A.$$

Από τον ορισμό του $[-,-]$ έχουμε

$$\nabla_A \circ \iota_1 = \mathrm{id}_A, \qquad \nabla_A \circ \iota_2 = \mathrm{id}_A,$$

και ο ∇_A είναι ο μοναδικός μορφισμός $A + A \to A$ με αυτές τις δύο ιδιότητες. □

Ο Δ_A αντιγράφει, ενώ ο ∇_A συγχωνεύει δύο αντίγραφα σε ένα και ξεχνά από ποιο αντίγραφο προήλθε κάθε στοιχείο. Στην **Set** έχουμε $\Delta_A(a) = (a, a)$ και $\nabla_A\big((a, i)\big) = a$ για $i \in \{0, 1\}$.

8.11 - Μονάδα γινομένου και συν-γινομένου

i. Οι προβολές του $A \times \mathbf{1}$ είναι $\pi_1 : A \times \mathbf{1} \to A$ και $\pi_2 : A \times \mathbf{1} \to \mathbf{1}$. Ο π_2 είναι αναγκαστικά ο μοναδικός μορφισμός προς το τελικό αντικείμενο, δηλαδή $\pi_2 = !_{A\times\mathbf{1}}$.

Ορίζουμε $\theta = \langle \mathrm{id}_A, !_A \rangle : A \to A \times \mathbf{1}$. Από τον ορισμό, $\pi_1 \circ \theta = \mathrm{id}_A$.

Για την άλλη σύνθεση συγκρίνουμε τους $\theta \circ \pi_1$ και $\mathrm{id}_{A\times\mathbf{1}}$ μέσω των προβολών. Έχουμε

$$\pi_1 \circ (\theta \circ \pi_1) = \mathrm{id}_A \circ \pi_1 = \pi_1 = \pi_1 \circ \mathrm{id}_{A\times\mathbf{1}},$$

και

$$\pi_2 \circ (\theta \circ \pi_1) = \pi_2 = \pi_2 \circ \mathrm{id}_{A\times\mathbf{1}},$$

όπου η πρώτη ισότητα της δεύτερης γραμμής ισχύει επειδή και τα δύο μέλη είναι μορφισμοί $A \times \mathbf{1} \to \mathbf{1}$, και προς το τελικό αντικείμενο υπάρχει μόνο ένας. Από την Άσκηση 8.2(iii), $\theta \circ \pi_1 = \mathrm{id}_{A\times\mathbf{1}}$. Άρα ο π_1 είναι ισομορφισμός με αντίστροφο τον θ, και $A \times \mathbf{1} \cong A$. □

ii. Αναστρέφουμε τα βέλη. Το τελικό αντικείμενο $\mathbf{1}$ γίνεται αρχικό αντικείμενο $\mathbf{0}$, με μοναδικό μορφισμό $i_A : \mathbf{0} \to A$ για κάθε A. Οι προβολές γίνονται εγκλεισμοί $\iota_1 : A \to A + \mathbf{0}$ και $\iota_2 : \mathbf{0} \to A + \mathbf{0}$, και ο θ γίνεται ο

$$\theta' = [\mathrm{id}_A, i_A] : A + \mathbf{0} \to A.$$

Από τον ορισμό, $\theta' \circ \iota_1 = \mathrm{id}_A$. Για τον $\iota_1 \circ \theta'$ έχουμε

$$(\iota_1 \circ \theta') \circ \iota_1 = \iota_1, \qquad (\iota_1 \circ \theta') \circ \iota_2 = \iota_2,$$

όπου η δεύτερη ισότητα ισχύει επειδή και τα δύο μέλη είναι μορφισμοί $\mathbf{0} \to A+\mathbf{0}$, και από το αρχικό αντικείμενο υπάρχει μόνο ένας. Ο $\mathrm{id}_{A+\mathbf{0}}$ ικανοποιεί τις ίδιες σχέσεις, άρα $\iota_1 \circ \theta' = \mathrm{id}_{A+\mathbf{0}}$ και

$$A + \mathbf{0} \cong A.$$

iii. Στην **Set** τελικό αντικείμενο είναι κάθε μονοσύνολο $\{*\}$ και αρχικό αντικείμενο το $\varnothing$. Πράγματι $A \times \{*\} \cong A$ και $A \sqcup \varnothing \cong A$, όπως είδαμε με ρητές αμφιρρίψεις στην Άσκηση 8.4.

8.12 - Αντίθετη κατηγορία διαιρετότητας

i. Τα αντικείμενα παραμένουν οι φυσικοί αριθμοί. Υπάρχει βέλος $m \to n$ στην $(\mathbb{N}, |)^{\mathrm{op}}$ αν και μόνο αν υπάρχει βέλος $n \to m$ στην $(\mathbb{N}, |)$, δηλαδή αν και μόνο αν $n \mid m$. Η αντίστοιχη διάταξη είναι η σχέση «είναι πολλαπλάσιο του». Το m προηγείται του n ακριβώς όταν το m είναι πολλαπλάσιο του n.

ii. Ένα αντικείμενο P με βέλη $P \to m$ και $P \to n$ στην αντίθετη κατηγορία ικανοποιεί $m \mid P$ και $n \mid P$, δηλαδή είναι κοινό πολλαπλάσιο. Η καθολική ιδιότητα απαιτεί κάθε κοινό πολλαπλάσιο D να έχει βέλος $D \to P$ στην αντίθετη κατηγορία, δηλαδή $P \mid D$. Άρα

$$m \times n = \operatorname{lcm}(m, n) \quad \text{στην } (\mathbb{N}, |)^{\mathrm{op}}.$$

Αυτό είναι το συν-γινόμενο της $(\mathbb{N}, |)$ που βρήκαμε στην Άσκηση 8.5.

iii. Το γινόμενο ορίζεται με βέλη προς τα A και B, ενώ το συν-γινόμενο με βέλη από τα A και B. Η αντιστροφή όλων των βελών μετατρέπει τον έναν ορισμό στον άλλον, άρα για κάθε κατηγορία $\mathcal{C}$ το γινόμενο των A και B στη $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ είναι το συν-γινόμενό τους στη $\mathcal{C}$, και αντιστρόφως. Για $\mathcal{C} = (\mathbb{N}, |)$ η γενική αυτή δήλωση γίνεται η αντιστοιχία ανάμεσα στο lcm και το gcd. Το γινόμενο της $(\mathbb{N}, |)^{\mathrm{op}}$ είναι το lcm και το συν-γινόμενό της είναι το gcd.

8.13 - Δυϊκή προσεταιριστικότητα

i. Αναστρέφουμε τα βέλη της Άσκησης 8.9. Γράφουμε ι_1, ι_2 για τους εγκλεισμούς του $A + B$, $j_1 : A + B \to (A + B) + C$ και $j_2 : C \to (A + B) + C$ για τους εγκλεισμούς του $(A + B) + C$, και ορίζουμε τους τρεις σύνθετους εγκλεισμούς

$$e_A = j_1 \circ \iota_1, \qquad e_B = j_1 \circ \iota_2, \qquad e_C = j_2.$$

Ομοίως, με κ_1, κ_2 τους εγκλεισμούς του $B + C$ και $l_1 : A \to A + (B + C)$, $l_2 : B + C \to A + (B + C)$, θέτουμε

$$e'_A = l_1, \qquad e'_B = l_2 \circ \kappa_1, \qquad e'_C = l_2 \circ \kappa_2.$$

Δυϊκά προς την Άσκηση 8.9, ένας μορφισμός με πηγή το $(A+B)+C$ καθορίζεται από τις συνθέσεις του με τους e_A, e_B, e_C. Ορίζουμε

$$\begin{aligned}\alpha' &= \big[\, [e'_A, e'_B],\ e'_C \,\big] : (A+B)+C \to A+(B+C),\\ \beta' &= \big[\, e_A,\ [e_B, e_C] \,\big] : A+(B+C) \to (A+B)+C.\end{aligned}$$

Από την κατασκευή, $\alpha' \circ e_X = e'_X$ και $\beta' \circ e'_X = e_X$ για $X = A, B, C$. Άρα $(\beta' \circ \alpha') \circ e_X = e_X$ για τα τρία X, οπότε $\beta' \circ \alpha' = \mathrm{id}$, και συμμετρικά $\alpha' \circ \beta' = \mathrm{id}$. Επομένως

$$(A+B)+C \ \cong\ A+(B+C)$$

σε κάθε κατηγορία με συν-γινόμενα. □

ii. Στην **Set**, με $a \in A$, $b \in B$ και $c \in C$, τα στοιχεία των δύο συνόλων έχουν τις μορφές

$$\begin{aligned}(A \sqcup B) \sqcup C \ &\ni\ \big((a,0),0\big),\ \big((b,1),0\big),\ (c,1),\\ A \sqcup (B \sqcup C) \ &\ni\ (a,0),\ \big((b,0),1\big),\ \big((c,1),1\big).\end{aligned}$$

Ορίζουμε

$$\begin{aligned}\Phi\big(((a,0),0)\big) &= (a,0),\\ \Phi\big(((b,1),0)\big) &= ((b,0),1),\\ \Phi\big((c,1)\big) &= ((c,1),1).\end{aligned}$$

Κάθε στοιχείο του $(A \sqcup B) \sqcup C$ έχει ακριβώς μία από τις τρεις μορφές, άρα η Φ είναι καλά ορισμένη. Η $\Psi : A \sqcup (B \sqcup C) \to (A \sqcup B) \sqcup C$ με

$$\begin{aligned}\Psi\big((a,0)\big) &= ((a,0),0),\\ \Psi\big(((b,0),1)\big) &= ((b,1),0),\\ \Psi\big(((c,1),1)\big) &= (c,1)\end{aligned}$$

ικανοποιεί $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$ και $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$, όπως φαίνεται ελέγχοντας καθεμία από τις τρεις μορφές. Άρα η Φ είναι αμφίρριψη.

iii. Η απόδειξη της Άσκησης 8.9 δεν αναφέρεται στη φύση των αντικειμένων. Χρησιμοποιεί μόνο βέλη, σύνθεση και μοναδικότητα, και ισχύει σε κάθε κατηγορία, άρα και στη $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. Το γινόμενο της $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ είναι το συν-γινόμενο της $\mathcal{C}$, οπότε η ίδια απόδειξη, διαβασμένη στη $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, είναι απόδειξη για τα συν-γινόμενα της $\mathcal{C}$.

Στα σύνολα η απευθείας επαλήθευση δεν εργάζεται με την καθολική ιδιότητα αλλά με συγκεκριμένες υλοποιήσεις, δηλαδή με διατεταγμένα ζεύγη για το γινόμενο και με στοιχεία που φέρουν ετικέτα για το συν-γινόμενο. Οι δύο υλοποιήσεις δεν προκύπτουν η μία από την άλλη με αντιστροφή βελών. Τα βέλη της $\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ είναι συναρτήσεις με αντεστραμμένη κατεύθυνση, και η κατηγορία αυτή δεν παριστάνεται με φυσικό τρόπο ως κατηγορία συνόλων και συναρτήσεων. Γι' αυτό ο υπολογισμός πρέπει να γίνει χωριστά για καθεμία.

8.14 - Γινόμενο και συν-γινόμενο στην 2

Η $\mathbf{2}$ έχει αντικείμενα $0, 1$ και μορφισμούς τους id_0, id_1 και $u : 0 \to 1$. Δεν υπάρχει βέλος $1 \to 0$.

Γινόμενο 0×1. Ζητούμε αντικείμενο P με βέλη $P \to 0$ και $P \to 1$. Το $P = 1$ αποκλείεται, γιατί δεν υπάρχει βέλος $1 \to 0$. Το $P = 0$ διαθέτει τα $\pi_1 = \mathrm{id}_0 : 0 \to 0$ και $\pi_2 = u : 0 \to 1$.

Ελέγχουμε την καθολική ιδιότητα. Έστω C με βέλη $f : C \to 0$ και $g : C \to 1$. Η ύπαρξη του f επιβάλλει $C = 0$, οπότε $f = \mathrm{id}_0$ και $g = u$. Ο μοναδικός μορφισμός $0 \to 0$ είναι ο $h = \mathrm{id}_0$, και ισχύει $\pi_1 \circ h = \mathrm{id}_0 = f$ και $\pi_2 \circ h = u = g$. Άρα

$$0 \times 1 = 0.$$

Συν-γινόμενο $0 + 1$. Ζητούμε Q με βέλη $0 \to Q$ και $1 \to Q$. Το $Q = 0$ αποκλείεται, γιατί δεν υπάρχει βέλος $1 \to 0$. Το $Q = 1$ διαθέτει τα $\iota_1 = u : 0 \to 1$ και $\iota_2 = \mathrm{id}_1$. Έστω C με βέλη $f : 0 \to C$ και $g : 1 \to C$. Η ύπαρξη του g επιβάλλει $C = 1$, οπότε $f = u$ και $g = \mathrm{id}_1$. Ο μοναδικός μορφισμός $1 \to 1$ είναι ο $h = \mathrm{id}_1$, με $h \circ \iota_1 = u = f$ και $h \circ \iota_2 = \mathrm{id}_1 = g$. Άρα

$$0 + 1 = 1.$$

Η $\mathbf{2}$ είναι η διάταξη $0 \leq 1$. Το γινόμενο είναι το μικρότερο από τα δύο στοιχεία και το συν-γινόμενο το μεγαλύτερο, σε συμφωνία με την Άσκηση 8.15.

8.15 - Γινόμενο και συν-γινόμενο στην $(\mathbb{N}, \leq)$

i. Ένα αντικείμενο P με βέλη $P \to m$ και $P \to n$ ικανοποιεί $P \leq m$ και $P \leq n$, δηλαδή είναι κοινό κάτω φράγμα των m και n. Η καθολική ιδιότητα απαιτεί κάθε κοινό κάτω φράγμα C να ικανοποιεί $C \leq P$. Το $\min(m, n)$ είναι κοινό

κάτω φράγμα, και κάθε C με $C \leq m$ και $C \leq n$ ικανοποιεί $C \leq \min(m, n)$. Η μοναδικότητα των βελών είναι αυτόματη, όπως σε κάθε poset. Άρα

$$m \times n = \min(m, n).$$

ii. Δυϊκά, ένα αντικείμενο Q με βέλη $m \to Q$ και $n \to Q$ είναι κοινό άνω φράγμα, και η καθολική ιδιότητα απαιτεί $Q \leq D$ για κάθε κοινό άνω φράγμα D. Άρα

$$m + n = \max(m, n).$$

iii. Η ίδια καθολική ιδιότητα δίνει gcd και lcm στην $(\mathbb{N}, |)$, αλλά min και max στην $(\mathbb{N}, \leq)$. Για παράδειγμα, για $m = 4$ και $n = 6$ το γινόμενο είναι 2 στην πρώτη κατηγορία και 4 στη δεύτερη, ενώ το συν-γινόμενο είναι 12 και 6 αντίστοιχα. Και στις δύο περιπτώσεις το γινόμενο είναι το μέγιστο κάτω φράγμα και το συν-γινόμενο το ελάχιστο άνω φράγμα ως προς την εκάστοτε διάταξη.

Η σύγκριση δείχνει ότι το γινόμενο και το συν-γινόμενο δεν καθορίζονται από τα αντικείμενα αλλά από τα βέλη. Οι δύο κατηγορίες έχουν τα ίδια αντικείμενα και διαφορετικούς μορφισμούς, και αυτό αρκεί για να αλλάξει το αποτέλεσμα. Η καθολική ιδιότητα περιγράφει τον ρόλο που παίζει ένα αντικείμενο μέσα στην κατηγορία, και όχι το ίδιο το αντικείμενο.

8.16 - Πότε ο $\langle f, g \rangle$ είναι ισομορφισμός

i. Στην **Set** η $\langle f, g \rangle : A \to B \times C$ δίνεται από τον τύπο $a \mapsto (f(a), g(a))$, και είναι ισομορφισμός ακριβώς όταν είναι αμφίρριψη. Η ζητούμενη συνθήκη είναι επομένως η εξής. Για κάθε ζεύγος $(b, c) \in B \times C$ υπάρχει ακριβώς ένα $a \in A$ με $f(a) = b$ και $g(a) = c$.

Η συνθήκη αναλύεται σε δύο μέρη. Η $\langle f, g \rangle$ είναι έρριψη αν και μόνο αν οι f και g διακρίνουν από κοινού τα στοιχεία του A, δηλαδή

$$f(a) = f(a') \text{ και } g(a) = g(a') \implies a = a'.$$

Καμία από τις δύο δεν χρειάζεται να είναι έρριψη μόνη της. Η $\langle f, g \rangle$ είναι επίρριψη αν και μόνο αν κάθε ζεύγος τιμών (b, c) λαμβάνεται ταυτόχρονα, δηλαδή υπάρχει a με $f(a) = b$ και $g(a) = c$.

Ισοδύναμα, η $\langle f, g \rangle$ είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν η τριάδα (A, f, g) είναι γινόμενο των B και C. Αν η τριάδα είναι γινόμενο, η $\langle f, g \rangle$ είναι ο ισομορφισμός της Πρότασης 8.1, αφού ικανοποιεί $\pi_1 \circ \langle f, g \rangle = f$ και $\pi_2 \circ \langle f, g \rangle = g$.

Αντιστρόφως, έστω ότι η $\varphi = \langle f, g\rangle$ είναι ισομορφισμός. Τότε $f = \pi_1 \circ \varphi$ και $g = \pi_2 \circ \varphi$. Για κάθε ζεύγος $u : X \to B, v : X \to C$ ο $h = \varphi^{-1} \circ \langle u, v\rangle$ ικανοποιεί $f \circ h = \pi_1 \circ \langle u, v\rangle = u$ και ομοίως $g \circ h = v$. Αν και ο $h' : X \to A$ ικανοποιεί $f \circ h' = u$ και $g \circ h' = v$, τότε $\pi_1 \circ (\varphi \circ h') = u$ και $\pi_2 \circ (\varphi \circ h') = v$, οπότε από την Άσκηση 8.2(iii) $\varphi \circ h' = \langle u, v\rangle$ και $h' = h$.

ii. Έστω $A = B = C = \{0, 1\}$ και $f = g = \mathrm{id}$. Οι f και g είναι επιρρίψεις, και μάλιστα αμφιρρίψεις. Η $\langle f, g\rangle$ δίνεται από $a \mapsto (a, a)$ και έχει εικόνα το $\{(0, 0), (1, 1)\}$. Το $(0, 1)$ δεν ανήκει στην εικόνα, αφού θα απαιτούσε $a = 0$ και $a = 1$ ταυτόχρονα. Άρα η $\langle f, g\rangle$ δεν είναι επίρριψη, και επομένως δεν είναι ισομορφισμός. Ο ίδιος έλεγχος γίνεται και με πληθικότητες, αφού $|A| = 2$ και $|B \times C| = 4$.

8.17 - Μη αντιμεταθετικότητα ελεύθερου γινομένου

Έστω a το μη ουδέτερο στοιχείο του πρώτου παράγοντα $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ και b το μη ουδέτερο στοιχείο του δεύτερου, με $a^2 = b^2 = e$.

Δεχόμαστε, σύμφωνα με την υπόδειξη, ότι κάθε στοιχείο του $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ γράφεται μοναδικά ως γινόμενο μη ουδέτερων στοιχείων των δύο παραγόντων που εναλλάσσονται. Οι κανονικές μορφές είναι επομένως οι

$$e,\ a,\ b,\ ab,\ ba,\ aba,\ bab,\ abab,\ \ldots$$

Τα ab και ba είναι και τα δύο σε κανονική μορφή, και οι μορφές αυτές είναι διαφορετικές, αφού η πρώτη αρχίζει με στοιχείο του πρώτου παράγοντα και η δεύτερη με στοιχείο του δεύτερου. Από τη μοναδικότητα της κανονικής μορφής,

$$ab \neq ba.$$

Άρα τα a και b δεν μετατίθενται, και η $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ δεν είναι αβελιανή. □

Το ελεύθερο γινόμενο δύο αβελιανών ομάδων δεν είναι κατ' ανάγκην αβελιανή ομάδα. Το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι το $G * H$ δεν είναι ποτέ αβελιανό όταν και οι δύο ομάδες είναι μη τετριμμένες. Αρκεί να πάρουμε μη ουδέτερα $g \in G$ και $h \in H$, οπότε τα gh και hg είναι διαφορετικές κανονικές μορφές. Εδώ μάλιστα η ομάδα είναι άπειρη, αφού οι κανονικές μορφές είναι άπειρες το πλήθος, ενώ το ευθύ γινόμενο $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ έχει τέσσερα στοιχεία.

8.18 - Διγινόμενο στους διανυσματικούς χώρους

Έστω $V \oplus W = \{(v, w) \mid v \in V,\ w \in W\}$ με τις πράξεις κατά συνιστώσα.

i. Ορίζουμε τους εγκλεισμούς

$$\iota_1 : V \to V \oplus W, \quad \iota_1(v) = (v, 0),$$
$$\iota_2 : W \to V \oplus W, \quad \iota_2(w) = (0, w),$$

που είναι γραμμικές απεικονίσεις.

Έστω U διανυσματικός χώρος και $f : V \to U, g : W \to U$ γραμμικές απεικονίσεις. Ορίζουμε

$$[f, g] : V \oplus W \to U, \qquad [f, g](v, w) = f(v) + g(w).$$

Η $[f, g]$ είναι γραμμική, αφού για $\lambda \in \mathbb{F}$ ισχύει

$$\begin{aligned}[f, g]\big((v, w) + \lambda(v', w')\big) &= f(v + \lambda v') + g(w + \lambda w') \\ &= [f, g](v, w) + \lambda\, [f, g](v', w').\end{aligned}$$

Επίσης $[f, g](\iota_1(v)) = f(v) + g(0) = f(v)$ και ομοίως $[f, g](\iota_2(w)) = g(w)$.

Μοναδικότητα. Κάθε $(v, w) \in V \oplus W$ γράφεται $(v, w) = \iota_1(v) + \iota_2(w)$. Αν η h είναι γραμμική με $h \circ \iota_1 = f$ και $h \circ \iota_2 = g$, τότε

$$h(v, w) = h(\iota_1(v)) + h(\iota_2(w)) = f(v) + g(w) = [f, g](v, w).$$

Άρα $h = [f, g]$, και το $V \oplus W$ είναι συν-γινόμενο. □

ii. Θεωρούμε το ίδιο αντικείμενο με τις προβολές $\pi_1(v, w) = v$ και $\pi_2(v, w) = w$. Για γραμμικές $f : X \to V, g : X \to W$ ορίζουμε

$$\langle f, g\rangle : X \to V \oplus W, \qquad \langle f, g\rangle(x) = \big(f(x), g(x)\big),$$

που είναι γραμμική και ικανοποιεί $\pi_1 \circ \langle f, g\rangle = f$ και $\pi_2 \circ \langle f, g\rangle = g$. Αν η h ικανοποιεί τις ίδιες δύο σχέσεις, τότε $h(x) = \big(\pi_1(h(x)), \pi_2(h(x))\big) = \big(f(x), g(x)\big)$, άρα $h = \langle f, g\rangle$.

Το $V \oplus W$ είναι επομένως ταυτόχρονα γινόμενο και συν-γινόμενο, δηλαδή διγινόμενο. □

Στην **Set** το φαινόμενο δεν ισχύει γενικά. Για $A = B = \{*\}$ το γινόμενο $A \times B$ έχει ένα στοιχείο, ενώ το συν-γινόμενο $A \sqcup B$ έχει δύο, οπότε τα δύο αντικείμενα δεν είναι καν ισόμορφα. Οι τύποι $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ και $|A \sqcup B| = |A| + |B|$ για πεπερασμένα σύνολα δείχνουν ότι οι πληθάριθμοι διαφέρουν κατά κανόνα,

όχι όμως πάντα, αφού για $|A| = |B| = 2$ ισχύει $2 \cdot 2 = 2 + 2$. Γι' αυτό το αντιπαράδειγμα χρειάζεται συγκεκριμένα σύνολα.

iii. *Το ευθύ άθροισμα είναι συν-γινόμενο.* Το $\bigoplus_{i\in I} V_i$ αποτελείται από τις οικογένειες $(v_i)_{i\in I}$ με $v_i = 0$ για όλα τα i εκτός από πεπερασμένα το πλήθος. Ο εγκλεισμός $\iota_j : V_j \to \bigoplus_{i\in I} V_i$ αντιστοιχίζει το v στην οικογένεια που έχει v στη θέση j και 0 στις υπόλοιπες. Για γραμμικές $f_i : V_i \to U$ ορίζουμε

$$[f_i]_{i\in I}\big((v_i)_{i\in I}\big) = \sum_{i\in I} f_i(v_i).$$

Το άθροισμα έχει πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών όρων, αφού $f_i(0) = 0$, άρα είναι καλά ορισμένο. Η $[f_i]_{i\in I}$ είναι γραμμική και ικανοποιεί $[f_i]_{i\in I} \circ \iota_j = f_j$ για κάθε j. Για τη μοναδικότητα, κάθε στοιχείο του ευθέος αθροίσματος είναι πεπερασμένο άθροισμα $(v_i)_{i\in I} = \sum_i \iota_i(v_i)$ πάνω στα i με $v_i \neq 0$. Αν η h είναι γραμμική με $h \circ \iota_i = f_i$ για κάθε i, τότε

$$h\big((v_i)_{i\in I}\big) = \sum_i h(\iota_i(v_i)) = \sum_i f_i(v_i).$$

Το επιχείρημα είναι το ίδιο με του (i), και στηρίζεται στο ότι τα αθροίσματα είναι πεπερασμένα.

Το ευθύ γινόμενο. Θεωρούμε τώρα το $\prod_{i\in I} V_i$ με τους ίδιους εγκλεισμούς ι_j. Κατ' αναλογία, ο επαγόμενος μορφισμός θα έπρεπε να δίνεται από τον ίδιο τύπο $(v_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} f_i(v_i)$. Όταν άπειρες συνιστώσες v_i είναι μη μηδενικές, το άθροισμα μπορεί να έχει άπειρους μη μηδενικούς όρους. Για παράδειγμα, για $I = \mathbb{N}$, $V_i = U = \mathbb{F}$, $f_i = \mathrm{id}_{\mathbb{F}}$ και $v_i = 1$ για κάθε i, ο τύπος δίνει το $1 + 1 + 1 + \cdots$. Σε έναν διανυσματικό χώρο ορίζονται μόνο πεπερασμένα αθροίσματα, και χωρίς τοπολογία δεν υπάρχει έννοια σύγκλισης που να δίνει νόημα σε ένα άπειρο άθροισμα. Εδώ καταρρέει η κατασκευή.

Η αποτυχία του τύπου δεν αποδεικνύει από μόνη της ότι η καθολική ιδιότητα δεν ισχύει, γι' αυτό συμπληρώνουμε το επιχείρημα. Οι σχέσεις $h\circ\iota_i = f_i$ καθορίζουν την h μόνο πάνω στον υπόχωρο που παράγουν οι εικόνες των ι_i, δηλαδή πάνω στο $\bigoplus_{i\in I} V_i$. Όταν άπειρα το πλήθος V_i είναι μη μηδενικά, ο υπόχωρος αυτός είναι γνήσιος. Επεκτείνουμε μια βάση του σε βάση του $\prod_{i\in I} V_i$, πράγμα δυνατό χάρη στο λήμμα του Zorn, επιλέγουμε ένα από τα νέα διανύσματα της βάσης, έστω e, και ορίζουμε τη γραμμική μορφή $\varphi : \prod_{i\in I} V_i \to \mathbb{F}$ με $\varphi(e) = 1$ και $\varphi = 0$ στα υπόλοιπα διανύσματα της βάσης. Τότε $\varphi \neq 0$ και $\varphi \circ \iota_i = 0$ για κάθε i. Για $U = \mathbb{F}$ και $f_i = 0$ για κάθε i, τόσο η μηδενική απεικόνιση όσο και

η φ ικανοποιούν τις σχέσεις $h \circ \iota_i = f_i$. Η μοναδικότητα παραβιάζεται, άρα το $\prod_{i\in I} V_i$ με τους προφανείς εγκλεισμούς δεν είναι συν-γινόμενο.

Για πεπερασμένο I ο περιορισμός στις οικογένειες με πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών συνιστωσών δεν αποκλείει καμία οικογένεια, οι δύο κατασκευές συμπίπτουν, και ανακτούμε το διγινόμενο των (i) και (ii).

8.19 - Η Field δεν έχει πεπερασμένα γινόμενα

i. Κάθε ομομορφισμός σωμάτων $\pi : P \to L$ είναι έρριψη. Πράγματι, αν $x \neq 0$, τότε $\pi(x) \cdot \pi(x^{-1}) = \pi(1_P) = 1_L \neq 0$, άρα $\pi(x) \neq 0$. Ο πυρήνας του π είναι λοιπόν $\{0\}$, και από $\pi(x) = \pi(y)$ παίρνουμε $\pi(x - y) = 0$, δηλαδή $x = y$. Επομένως, για κάθε φυσικό n,

$$n \cdot 1_P = 0 \iff \pi(n \cdot 1_P) = n \cdot 1_L = 0,$$

δηλαδή τα P και L έχουν την ίδια χαρακτηριστική. Εφαρμόζοντας το συμπέρασμα στον $\pi_1 : P \to \mathbb{Q}$ παίρνουμε $\mathrm{char}(P) = 0$. Εφαρμόζοντάς το στον $\pi_2 : P \to \mathbb{F}_2$ παίρνουμε $\mathrm{char}(P) = 2$.

ii. Ένα σώμα έχει μία μόνο χαρακτηριστική, άρα οι δύο απαιτήσεις είναι ασυμβίβαστες. Ρητά, στο $\mathbb{F}_2$ ισχύει $\pi_2(2 \cdot 1_P) = 2 \cdot 1_{\mathbb{F}_2} = 0$, και επειδή ο π_2 είναι έρριψη, $2 \cdot 1_P = 0$. Τότε όμως $\pi_1(2 \cdot 1_P) = 0$, ενώ $\pi_1(2 \cdot 1_P) = 2 \cdot 1_{\mathbb{Q}} = 2 \neq 0$, που είναι άτοπο. Δεν υπάρχει λοιπόν σώμα P με ομομορφισμούς προς το $\mathbb{Q}$ και προς το $\mathbb{F}_2$. Ειδικότερα δεν υπάρχει γινόμενο των $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{F}_2$ στη **Field**. □

Το επιχείρημα δεν χρησιμοποίησε την καθολική ιδιότητα. Αρκούσε η ύπαρξη των δύο προβολών. Στην κατηγορία των δακτυλίων το γινόμενο υπάρχει και είναι ο δακτύλιος $\mathbb{Q} \times \mathbb{F}_2$, ο οποίος όμως δεν είναι σώμα, αφού $(1, 0) \cdot (0, 1) = (0, 0)$.

8.20 - Ο συναρτητής $(-) \times (-)$

Γράφουμε π_1, π_2 για τις προβολές του $A \times B$, π_1', π_2' για του $A' \times B'$ και π_1'', π_2'' για του $A'' \times B''$.

i. Οι $f : A \to A'$ και $g : B \to B'$ δίνουν δύο μορφισμούς με πηγή το $A \times B$,

$$f \circ \pi_1 : A \times B \to A', \qquad g \circ \pi_2 : A \times B \to B'.$$

Από την καθολική ιδιότητα του $A' \times B'$ ορίζουμε

$$f \times g = \langle f \circ \pi_1,\ g \circ \pi_2 \rangle : A \times B \to A' \times B',$$

τον μοναδικό μορφισμό με

$$\pi'_1 \circ (f \times g) = f \circ \pi_1, \qquad \pi'_2 \circ (f \times g) = g \circ \pi_2.$$

Στην **Set** ο ορισμός δίνει $(f \times g)(a, b) = (f(a), g(b))$.

ii. Έστω $f' : A'' \to A$ και $g' : B'' \to B$. Και τα δύο μέλη είναι μορφισμοί $A'' \times B'' \to A' \times B'$, οπότε από την Άσκηση 8.2(iii) αρκεί να συμφωνούν μετά τη σύνθεση με τις προβολές π'_1, π'_2. Για την πρώτη προβολή έχουμε

$$\begin{aligned} \pi'_1 \circ \big((f \times g) \circ (f' \times g')\big) &= \big(\pi'_1 \circ (f \times g)\big) \circ (f' \times g') \\ &= (f \circ \pi_1) \circ (f' \times g') \\ &= f \circ \big(\pi_1 \circ (f' \times g')\big) \\ &= f \circ (f' \circ \pi''_1) = (f \circ f') \circ \pi''_1. \end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, από τον ορισμό,

$$\pi'_1 \circ \big((f \circ f') \times (g \circ g')\big) = (f \circ f') \circ \pi''_1.$$

Τα δύο μέλη συμφωνούν, και ο ίδιος υπολογισμός ισχύει για την π'_2. Άρα

$$(f \circ f') \times (g \circ g') = (f \times g) \circ (f' \times g'). \quad \square$$

iii. Ο $\mathrm{id}_A \times \mathrm{id}_B$ είναι ο μοναδικός μορφισμός $u : A \times B \to A \times B$ με $\pi_1 \circ u = \mathrm{id}_A \circ \pi_1 = \pi_1$ και $\pi_2 \circ u = \mathrm{id}_B \circ \pi_2 = \pi_2$. Ο $\mathrm{id}_{A\times B}$ ικανοποιεί αυτές τις σχέσεις, άρα

$$\mathrm{id}_A \times \mathrm{id}_B = \mathrm{id}_{A\times B}. \quad \square$$

iv. Τα (ii) και (iii) είναι οι δύο νόμοι του συναρτητή, δηλαδή η διατήρηση της σύνθεσης και η διατήρηση των ταυτοτικών μορφισμών. Η κατασκευή $(-) \times (-)$ ορίζει επομένως συναρτητή δύο μεταβλητών. Πηγή του είναι η κατηγορία που έχει ως αντικείμενα τα ζεύγη (A, B) αντικειμένων της $\mathcal{C}$ και ως μορφισμούς τα ζεύγη (f, g) μορφισμών, με σύνθεση κατά συνιστώσα, και στόχος του η $\mathcal{C}$. Ο συναρτητής αντιστοιχίζει το (A, B) στο $A \times B$ και το (f, g) στον $f \times g$. Προϋποθέτει ότι έχουμε επιλέξει ένα γινόμενο για κάθε ζεύγος αντικειμένων. Διαφορετικές επιλογές δίνουν φυσικά ισόμορφους συναρτητές, λόγω της μοναδικότητας του γινομένου ως προς ισομορφισμό.

8.21 - Ο συναρτητής $(-)+(-)$

Γράφουμε ι_1, ι_2 για τους εγκλεισμούς του $A+B$, ι_1', ι_2' για του $A'+B'$ και ι_1'', ι_2'' για του $A''+B''$.

i. Οι $f : A \to A'$ και $g : B \to B'$ δίνουν δύο μορφισμούς με στόχο το $A'+B'$,

$$\iota_1' \circ f : A \to A'+B', \qquad \iota_2' \circ g : B \to A'+B'.$$

Από την καθολική ιδιότητα του συν-γινομένου $A+B$ ορίζουμε

$$f+g = [\, \iota_1' \circ f,\ \iota_2' \circ g \,] : A+B \to A'+B',$$

τον μοναδικό μορφισμό με

$$(f+g)\circ \iota_1 = \iota_1' \circ f, \qquad (f+g)\circ \iota_2 = \iota_2' \circ g.$$

Η κατασκευή προκύπτει από εκείνη της Άσκησης 8.20(i) με αντιστροφή των βελών. Οι προβολές γίνονται εγκλεισμοί και η σύνθεση με την προβολή από τα δεξιά γίνεται σύνθεση με τον εγκλεισμό από τα αριστερά.

ii. Έστω $f' : A'' \to A$ και $g' : B'' \to B$. Και τα δύο μέλη της πρώτης ισότητας είναι μορφισμοί με πηγή το $A''+B''$, οπότε αρκεί να συμφωνούν μετά τη σύνθεση με τους εγκλεισμούς ι_1'', ι_2''. Για τον πρώτο έχουμε

$$\begin{aligned}\big((f+g)\circ(f'+g')\big)\circ \iota_1'' &= (f+g)\circ\big((f'+g')\circ \iota_1''\big)\\ &= (f+g)\circ(\iota_1 \circ f') = \big((f+g)\circ \iota_1\big)\circ f'\\ &= (\iota_1' \circ f)\circ f' = \iota_1' \circ (f\circ f'),\end{aligned}$$

και από τον ορισμό $\big((f\circ f')+(g\circ g')\big)\circ \iota_1'' = \iota_1' \circ (f\circ f')$. Ομοίως για τον ι_2''. Από τη μοναδικότητα στην καθολική ιδιότητα του $A''+B''$,

$$(f\circ f')+(g\circ g') = (f+g)\circ(f'+g').$$

Ο $\mathrm{id}_A + \mathrm{id}_B$ είναι ο μοναδικός μορφισμός u με $u\circ\iota_1 = \iota_1$ και $u\circ\iota_2 = \iota_2$. Ο id_{A+B} έχει αυτές τις ιδιότητες, άρα $\mathrm{id}_A + \mathrm{id}_B = \mathrm{id}_{A+B}$. □

iii. Στην **Set** ο ορισμός του (i) δίνει

$$(f \sqcup g)\big((a,0)\big) = (f(a),0), \qquad (f\sqcup g)\big((b,1)\big) = (g(b),1),$$

αφού $(f \sqcup g)(\iota_1(a)) = \iota'_1(f(a))$ και $(f \sqcup g)(\iota_2(b)) = \iota'_2(g(b))$.

Ελέγχουμε την ισότητα $[f', g'] \circ (f \sqcup g) = [f' \circ f,\ g' \circ g]$ στα στοιχεία. Για το $(a, 0)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\big([f', g'] \circ (f \sqcup g)\big)\big((a, 0)\big) &= [f', g']\big((f(a), 0)\big) = f'(f(a)) \\ &= [f' \circ f,\ g' \circ g]\big((a, 0)\big),\end{aligned}$$

και για το $(b, 1)$

$$\begin{aligned}\big([f', g'] \circ (f \sqcup g)\big)\big((b, 1)\big) &= [f', g']\big((g(b), 1)\big) = g'(g(b)) \\ &= [f' \circ f,\ g' \circ g]\big((b, 1)\big).\end{aligned}$$

Τα δύο μέλη συμφωνούν σε κάθε στοιχείο του $A \sqcup B$. □

8.22 - Γινόμενο με περιορισμό

i. Το γινόμενο των A και B είναι μια τριάδα $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$ με $\pi_1 : A \times B \to A$ και $\pi_2 : A \times B \to B$, τέτοια ώστε για κάθε αντικείμενο X και κάθε ζεύγος μορφισμών $u : X \to A$, $v : X \to B$ να υπάρχει μοναδικός $h : X \to A \times B$ με $\pi_1 \circ h = u$ και $\pi_2 \circ h = v$. Οι f και g δεν εμφανίζονται στον ορισμό.

ii. Το υποσύνολο

$$P = \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\}$$

αποτελείται από τα ζεύγη των οποίων οι δύο συντεταγμένες έχουν την ίδια εικόνα στο C. Ως προς τους f και g χαρακτηρίζεται ως το σύνολο των σημείων του $A \times B$ στα οποία οι δύο συναρτήσεις

$$f \circ \pi_1,\ g \circ \pi_2 : A \times B \longrightarrow C$$

παίρνουν την ίδια τιμή. Είναι το μεγαλύτερο υποσύνολο του $A \times B$ στο οποίο οι δύο αυτές συναρτήσεις συμπίπτουν. Στο Κεφάλαιο 9 το σύνολο αυτό θα ονομαστεί εξισωτής των $f \circ \pi_1$ και $g \circ \pi_2$.

iii. Ορίζουμε ως $p_1 : P \to A$ και $p_2 : P \to B$ τους περιορισμούς των π_1 και π_2 στο P. Για κάθε $(a, b) \in P$ ισχύει, από τον ορισμό του P,

$$f(p_1(a, b)) = f(a) = g(b) = g(p_2(a, b)),$$

άρα $f \circ p_1 = g \circ p_2$, και το τετράγωνο

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p_2} & B \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A & \xrightarrow[f]{} & C \end{array}$$

είναι αντιμεταθετικό.

iv. Η τριάδα (P, p_1, p_2) με $f \circ p_1 = g \circ p_2$ πρέπει να έχει την εξής ιδιότητα. Για κάθε αντικείμενο Q και κάθε ζεύγος μορφισμών $q_1 : Q \to A$, $q_2 : Q \to B$ με $f \circ q_1 = g \circ q_2$ υπάρχει μοναδικός μορφισμός $u : Q \to P$ με

$$p_1 \circ u = q_1, \qquad p_2 \circ u = q_2.$$

Το P του (iii) την ικανοποιεί στην **Set**. Ο u δίνεται από $u(t) = (q_1(t), q_2(t))$, που ανήκει στο P λόγω της υπόθεσης $f(q_1(t)) = g(q_2(t))$, και είναι μοναδικός, αφού οι δύο συντεταγμένες του $u(t)$ καθορίζονται από τις δύο σχέσεις.

v. Η καθολική ιδιότητα του (iv) έχει την ίδια μορφή με εκείνη του γινομένου, με μία διαφορά. Στο γινόμενο συγκρίνουμε το $A \times B$ με όλα τα ζεύγη μορφισμών προς τα A και B. Εδώ συγκρίνουμε το P μόνο με τα ζεύγη (q_1, q_2) που ικανοποιούν την επιπλέον συνθήκη $f \circ q_1 = g \circ q_2$, και απαιτούμε την ίδια συνθήκη και από τις προβολές p_1, p_2. Το P είναι επομένως γινόμενο των A και B υπό τον περιορισμό της συμφωνίας πάνω στο C. Στην **Set** ο περιορισμός φαίνεται άμεσα, αφού το P είναι υποσύνολο του $A \times B$.

Η κατασκευή είναι το *pullback* των f και g, που μελετάται στο Κεφάλαιο 9.

8.23 - Ισοδυναμία και διατήρηση γινομένων

i. Έστω D αντικείμενο της $\mathcal{D}$ με μορφισμούς $f : D \to F(A)$ και $g : D \to F(B)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικός $u : D \to F(A \times B)$ με $F(\pi_1) \circ u = f$ και $F(\pi_2) \circ u = g$.

Μεταφορά στη $\mathcal{C}$. Ο F είναι ουσιωδώς επί, άρα υπάρχει $C \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ και ισομορφισμός $\varepsilon : F(C) \xrightarrow{\cong} D$. Οι $f \circ \varepsilon : F(C) \to F(A)$ και $g \circ \varepsilon : F(C) \to F(B)$ είναι μορφισμοί της $\mathcal{D}$ μεταξύ εικόνων του F. Ο F είναι πλήρης, άρα υπάρχουν $\tilde{f} : C \to A$ και $\tilde{g} : C \to B$ με

$$F(\tilde{f}) = f \circ \varepsilon, \qquad F(\tilde{g}) = g \circ \varepsilon.$$

Ύπαρξη. Από την καθολική ιδιότητα του $A \times B$ στη $\mathcal{C}$ υπάρχει ο $h = \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle : C \to A \times B$ με $\pi_1 \circ h = \tilde{f}$ και $\pi_2 \circ h = \tilde{g}$. Θέτουμε

$$u = F(h) \circ \varepsilon^{-1} : D \to F(A \times B).$$

Τότε

$$\begin{aligned} F(\pi_1) \circ u &= F(\pi_1) \circ F(h) \circ \varepsilon^{-1} = F(\pi_1 \circ h) \circ \varepsilon^{-1} \\ &= F(\tilde{f}) \circ \varepsilon^{-1} = f \circ \varepsilon \circ \varepsilon^{-1} = f, \end{aligned}$$

και ομοίως $F(\pi_2) \circ u = g$.

Μοναδικότητα. Έστω $u' : D \to F(A \times B)$ με τις ίδιες ιδιότητες. Ο $u' \circ \varepsilon : F(C) \to F(A \times B)$ προέρχεται, λόγω της πληρότητας, από κάποιον $h' : C \to A \times B$ με $F(h') = u' \circ \varepsilon$. Τότε

$$F(\pi_1 \circ h') = F(\pi_1) \circ u' \circ \varepsilon = f \circ \varepsilon = F(\tilde{f}),$$

και από την πιστότητα $\pi_1 \circ h' = \tilde{f}$. Ομοίως $\pi_2 \circ h' = \tilde{g}$. Από τη μοναδικότητα στην καθολική ιδιότητα του $A \times B$ έχουμε $h' = h$, άρα $u' \circ \varepsilon = F(h)$ και τελικά $u' = F(h) \circ \varepsilon^{-1} = u$. □

ii. Έστω X, Y τυχαία αντικείμενα της $\mathcal{D}$. Ο F είναι ουσιωδώς επί, άρα υπάρχουν αντικείμενα A, B της $\mathcal{C}$ και ισομορφισμοί $a : F(A) \to X$, $b : F(B) \to Y$. Η τριάδα

$$\big(F(A \times B),\ a \circ F(\pi_1),\ b \circ F(\pi_2)\big)$$

είναι γινόμενο των X και Y. Πράγματι, για $f : D \to X$ και $g : D \to Y$ εφαρμόζουμε το (i) στους $a^{-1} \circ f$ και $b^{-1} \circ g$, και ο μοναδικός u με $F(\pi_1) \circ u = a^{-1} \circ f$ και $F(\pi_2) \circ u = b^{-1} \circ g$ είναι ο μοναδικός με $a \circ F(\pi_1) \circ u = f$ και $b \circ F(\pi_2) \circ u = g$. Άρα η $\mathcal{D}$ έχει γινόμενα.

Έστω τώρα $F(A) \times F(B)$ το γινόμενο των $F(A)$ και $F(B)$ που έχουμε επιλέξει στη $\mathcal{D}$. Από το (i), το $F(A \times B)$ με τους $F(\pi_1), F(\pi_2)$ είναι επίσης γινόμενο των ίδιων αντικειμένων. Το (i) δεν λέει ότι τα δύο αντικείμενα συμπίπτουν. Η Πρόταση 8.1 δίνει όμως μοναδικό ισομορφισμό ανάμεσά τους που σέβεται τις προβολές, και με αυτή την έννοια γράφουμε

$$F(A \times B) \ \cong\ F(A) \times F(B).$$

Χωρίς τη μοναδικότητα ως προς ισομορφισμό, η σύγκριση δύο αντικειμένων που ικανοποιούν την ίδια καθολική ιδιότητα δεν θα είχε νόημα.

iii. Ο F ορίζει συναρτητή $F^{\mathrm{op}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ με την ίδια δράση σε αντικείμενα και μορφισμούς. Οι τρεις ιδιότητες μεταφέρονται αμετάβλητες. Τα Hom-σύνολα των αντίθετων κατηγοριών είναι τα ίδια σύνολα με αντεστραμμένους ρόλους πηγής και στόχου, άρα ο F^{op} είναι πιστός και πλήρης. Οι ισομορφισμοί των δύο κατηγοριών είναι οι ίδιοι, άρα ο F^{op} είναι ουσιωδώς επί. Ο F^{op} είναι επομένως ισοδυναμία. Τα συν-γινόμενα της $\mathcal{C}$ είναι τα γινόμενα της $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, οπότε τα (i) και (ii) για τον F^{op} δίνουν ότι, αν η $\mathcal{C}$ έχει συν-γινόμενα, τότε έχει και η $\mathcal{D}$, με

$$F(A + B) \;\cong\; F(A) + F(B).$$

iv. Στη $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{fd}}$ το γινόμενο των V και W είναι το $V \oplus W$ (Άσκηση 8.18), με

$$\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W.$$

Ο συναρτητής της ισοδυναμίας της Άσκησης 7.6 αντιστοιχίζει κάθε χώρο στη διάστασή του. Για $V = \mathbb{R}^n$ και $W = \mathbb{R}^m$ το (ii) δίνει

$$n \times m \;=\; F(V) \times F(W) \;\cong\; F(V \oplus W) \;=\; n + m.$$

Στη $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$ δύο ισόμορφα αντικείμενα είναι ίσα, αφού μια αντιστρέψιμη μήτρα είναι τετραγωνική. Το γινόμενο των αντικειμένων n και m είναι επομένως το αντικείμενο $n+m$, δηλαδή το άθροισμα των δύο φυσικών αριθμών. Οι προβολές $n+m \to n$ και $n+m \to m$ είναι οι εικόνες των προβολών του $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$, δηλαδή, ως προς τις συνήθεις βάσεις, οι μήτρες

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad \begin{pmatrix} 0 & I_m \end{pmatrix},$$

διαστάσεων $n \times (n + m)$ και $m \times (n + m)$ αντίστοιχα.

Ο όρος «γινόμενο» δηλώνει εδώ έναν κατηγορικό ρόλο και δεν σχετίζεται με τον πολλαπλασιασμό αριθμών. Από το (iii) και την Άσκηση 8.18, το ίδιο αντικείμενο $n + m$ είναι και το συν-γινόμενο των n και m.