Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 7

7.1 - Πιστός, πλήρης, ουσιωδώς επί

i. Ο F είναι *πιστός* αν για κάθε ζεύγος αντικειμένων A, B η επαγόμενη συνάρτηση $F_{A,B}$ είναι έρριψη. Αν δηλαδή $F(f) = F(g)$ για $f, g \in \mathcal{C}(A, B)$, τότε $f = g$. Ο F διακρίνει τους μορφισμούς.

ii. Ο F είναι *πλήρης* αν κάθε $F_{A,B}$ είναι επίρριψη. Κάθε μορφισμός $h : F(A) \to F(B)$ στην $\mathcal{D}$ είναι εικόνα κάποιου $f : A \to B$ της $\mathcal{C}$.

iii. Ο F είναι *ουσιωδώς επί* αν για κάθε αντικείμενο Y της $\mathcal{D}$ υπάρχει αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ με $F(X) \cong Y$. Η ιδιότητα λειτουργεί στο επίπεδο των αντικειμένων και όχι των Hom-συνόλων, και απαιτεί ισομορφία και όχι ισότητα. Κάθε αντικείμενο της $\mathcal{D}$ πρέπει να είναι ισόμορφο με κάποια εικόνα, χωρίς να χρειάζεται να συμπίπτει με αυτήν.

7.2 - Πιστός αλλά όχι πλήρης

i. Κάθε $F_{A,B}$ είναι έρριψη, αλλά κάποια δεν είναι επίρριψη. Στην $\mathcal{D}$ υπάρχουν μορφισμοί $F(A) \to F(B)$ που δεν προέρχονται από κανέναν μορφισμό $A \to B$ της $\mathcal{C}$. Η $\mathcal{C}$ εμφυτεύεται στη $\mathcal{D}$ χωρίς να καλύπτει όλα τα βέλη της.

ii. Ο επιλήσμων συναρτητής $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ αντιστοιχίζει κάθε ομάδα στο υποκείμενο σύνολό της και κάθε ομομορφισμό στην ίδια συνάρτηση. Είναι πιστός, αφού δύο ομομορφισμοί που ορίζουν την ίδια συνάρτηση είναι ίσοι. Δεν είναι πλήρης. Οι ομομορφισμοί $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ είναι οι $x \mapsto nx$, ενώ η συνάρτηση $s : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ με $s(x) = x + 1$ είναι μορφισμός $U(\mathbb{Z}) \to U(\mathbb{Z})$ της **Set** που δεν προέρχεται από κανέναν ομομορφισμό, αφού $s(0) = 1$ και ένας ομομορφισμός διατηρεί το ουδέτερο στοιχείο.

   Δεύτερο παράδειγμα. Θεωρούμε την υποκατηγορία $\mathcal{I}$ της **Set** με αντικείμενα όλα τα σύνολα και μορφισμούς μόνο τις ερρίψεις. Η σύνθεση ερρίψεων είναι έρριψη και οι ταυτοτικές είναι ερρίψεις, άρα πρόκειται για κατηγορία. Ο εγκλεισμός $\iota : \mathcal{I} \hookrightarrow \mathbf{Set}$ είναι πιστός, όπως κάθε εγκλεισμός. Δεν είναι πλήρης, γιατί η σταθερή συνάρτηση $\{0, 1\} \to \{0, 1\}$, $x \mapsto 0$, είναι μορφισμός της **Set** που δεν είναι έρριψη, άρα δεν προέρχεται από μορφισμό της $\mathcal{I}$.

   Τρίτο παράδειγμα. Ο συναρτητής $\Gamma : \mathbf{Set} \to \mathbf{Rel}$ αφήνει τα σύνολα αμετάβλητα και αντιστοιχίζει κάθε συνάρτηση $f : A \to B$ στο γράφημά της $R_f =$

$\{(a, f(a)) \mid a \in A\}$. Είναι πιστός, αφού διαφορετικές συναρτήσεις έχουν διαφορετικά γραφήματα, αλλά όχι πλήρης, γιατί για $A \neq \varnothing$ η κενή σχέση $\varnothing \subseteq A \times B$ δεν είναι γράφημα καμίας συνάρτησης.

7.3 - Ισομορφισμός έναντι ισοδυναμίας κατηγοριών

i. Ο ισομορφισμός απαιτεί συναρτητή $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ με

$$G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \qquad F \circ G = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}},$$

όπου οι ισότητες είναι αυστηρές ισότητες συναρτητών.

ii. Η ισοδυναμία χαλαρώνει τις ισότητες σε φυσικούς ισομορφισμούς,

$$G \circ F \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \qquad F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}.$$

iii. Οι ενδιαφέρουσες κατηγορίες σπάνια είναι αυστηρά ισόμορφες, γιατί διαφέρουν στο πλήθος των ισόμορφων αντιγράφων κάθε αντικειμένου. Η $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{fd}}$ και η $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$ (Άσκηση 7.6) δεν είναι ισόμορφες, είναι όμως ισοδύναμες, και η ισοδυναμία αρκεί. Διατηρεί όλες τις ιδιότητες που διατυπώνονται στη γλώσσα αντικειμένων, μορφισμών και σύνθεσης.

7.4 - Σκελετός και ισομορφισμός

i. Ένας ισομορφισμός κατηγοριών Φ με αντίστροφο Ψ ικανοποιεί $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}$, άρα είναι ερριπτικός στα αντικείμενα. Η **FinSet** όμως έχει πολλά διαφορετικά ισόμορφα αντικείμενα κάθε πληθικότητας (π.χ. $\{a, b\}$ και $\{x, y\}$), ενώ ο σκελετός έχει ακριβώς ένα. Καμία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία αντικειμένων δεν είναι δυνατή. Η ισοδυναμία δεν εμποδίζεται, γιατί το ουσιωδώς επί ζητά μόνο $\Phi(X) \cong \mathbf{n}$ και όχι ισότητα, και ανέχεται τη σύμπτυξη όλων των ισόμορφων αντιγράφων στο ίδιο αντικείμενο.

ii. Ο ισομορφισμός κατηγοριών διατηρεί τις πληθικότητες των Hom-συνόλων. Το $\{a, b\}$ έχει $2^2 = 4$ ενδομορφισμούς, και το μοναδικό αντικείμενο του σκελετού με 4 ενδομορφισμούς είναι το $\mathbf{2} = \{1, 2\}$, αφού $|\mathrm{End}(\mathbf{n})| = n^n$ και $n^n = 4$ μόνο για $n = 2$. Άρα κάθε υποψήφιος ισομορφισμός θα απαιτούσε $\Phi(\{a, b\}) = \mathbf{2}$, και για τον ίδιο λόγο $\Phi(\{x, y\}) = \mathbf{2}$ για κάθε άλλο δισύνολο. Η Φ δεν θα ήταν ερριπτική στα αντικείμενα, άρα δεν θα είχε αντίστροφο.

7.5 - Ισοδυναμία με κατηγορία με ένα αντικείμενο

Ελέγχουμε τις τρεις ιδιότητες για τον $F : \mathbf{1} \to \mathcal{C}$ με $F(*) = A$ και $F(\mathrm{id}_*) = \mathrm{id}_A$.

- *Πιστός.* Το $\mathbf{1}(*,*) = \{\mathrm{id}_*\}$ έχει ένα στοιχείο, άρα η $F_{*,*}$ είναι τετριμμένα έρριψη.
- *Πλήρης.* Το $\mathcal{C}(A,A) = \{\mathrm{id}_A\}$ έχει ένα στοιχείο και $F(\mathrm{id}_*) = \mathrm{id}_A$, άρα η $F_{*,*}$ είναι επίρριψη.
- *Ουσιωδώς επί.* Για το αντικείμενο A ισχύει $A = F(*)$. Για το B ισχύει $F(*) = A \cong B$ μέσω του $u : A \to B$, που είναι ισομορφισμός με αντίστροφο v. Το B δεν συμπίπτει με την εικόνα του F, αλλά είναι ισόμορφο με αυτήν, και αυτό αρκεί.

Ο F είναι πιστός, πλήρης και ουσιωδώς επί, άρα από τον χαρακτηρισμό των ισοδυναμιών του Κεφαλαίου 7 ισχύει $\mathbf{1} \simeq \mathcal{C}$. Οι κατηγορίες δεν είναι ισόμορφες, αφού η μία έχει ένα αντικείμενο και η άλλη δύο.

Μπορούμε να κατασκευάσουμε ρητά οιονεί αντίστροφο. Ο $G : \mathcal{C} \to \mathbf{1}$ αντιστοιχίζει τα A, B στο $*$ και κάθε μορφισμό στο id_*. Τότε $G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathbf{1}}$ αυστηρά, ενώ ο $F \circ G$ αντιστοιχίζει τα A, B στο A και κάθε μορφισμό στο id_A. Ορίζουμε $\varepsilon : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow F \circ G$ με

$$\varepsilon_A = \mathrm{id}_A, \qquad \varepsilon_B = v : B \to A.$$

Και οι δύο συνιστώσες είναι ισομορφισμοί. Για τη φυσικότητα στο u έχουμε $(F \circ G)(u) \circ \varepsilon_A = \mathrm{id}_A = v \circ u = \varepsilon_B \circ u$. Στο v έχουμε $(F \circ G)(v) \circ \varepsilon_B = v = \varepsilon_A \circ v$. Για τους ταυτοτικούς η φυσικότητα είναι άμεση. □

7.6 - $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{fd}} \simeq \mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$

i. *Πιστός.* Έστω $\varphi, \psi : V \to W$ με την ίδια μήτρα ως προς τις επιλεγμένες βάσεις $(v_1, \dots, v_m)$ του V και $(w_1, \dots, w_n)$ του W. Τότε $\varphi(v_j) = \psi(v_j)$ για κάθε j, και επειδή μια γραμμική απεικόνιση καθορίζεται από τις τιμές της σε μια βάση, $\varphi = \psi$.

ii. *Πλήρης.* Έστω M μήτρα $n \times m$, δηλαδή μορφισμός $F(V) = m \to n = F(W)$. Ορίζουμε $\varphi : V \to W$ γραμμικά με

$$\varphi(v_j) = \sum_{i=1}^{n} M_{ij}\, w_i, \qquad j = 1, \dots, m,$$

όπου οι βάσεις είναι οι επιλεγμένες. Η μήτρα της φ ως προς αυτές τις βάσεις είναι ακριβώς η M, άρα $F(\varphi) = M$.

iii. *Ουσιωδώς επί.* Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ παίρνουμε $V = \mathbb{R}^n$. Τότε $F(V) = \dim \mathbb{R}^n = n$, με ισότητα.

Η ισότητα εξηγείται από δύο παρατηρήσεις. Στα αντικείμενα ο F είναι η απεικόνιση $V \mapsto \dim V$, και η διάσταση του $\mathbb{R}^n$ είναι ακριβώς ο n. Επιπλέον, η $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$ έχει ένα μόνο αντικείμενο για κάθε διάσταση, και δύο αντικείμενα n, m είναι ισόμορφα μόνο όταν $n = m$, αφού μια αντιστρέψιμη μήτρα $n \times m$ είναι τετραγωνική. Η ισομορφία $F(V) \cong n$ που απαιτεί ο ορισμός ισοδυναμεί λοιπόν με ισότητα $F(V) = n$.

Ο F είναι πιστός, πλήρης και ουσιωδώς επί, άρα ισοδυναμία κατηγοριών. □

7.7 - Εγκλεισμός Ab ↪ Grp

i. Τα δύο σύνολα ταυτίζονται,

$$\mathbf{Ab}(A, B) = \mathbf{Grp}(\iota A, \iota B),$$

αφού ένας ομομορφισμός αβελιανών ομάδων δεν είναι τίποτα περισσότερο από έναν ομομορφισμό ομάδων μεταξύ αβελιανών ομάδων. Ο ι είναι πλήρης και πιστός, γιατί η **Ab** είναι πλήρης υποκατηγορία της **Grp**.

ii. Η συμμετρική ομάδα S_3 δεν είναι ισόμορφη με καμία αβελιανή ομάδα. Η αντιμεταθετικότητα διατηρείται από τους ισομορφισμούς ομάδων, οπότε αν $S_3 \cong A$ με A αβελιανή, η S_3 θα ήταν αβελιανή. Όμως $(1\,2)(1\,3) \neq (1\,3)(1\,2)$. Άρα ο ι δεν είναι ουσιωδώς επί.

iii. Αν ο ι ήταν μέρος ισοδυναμίας, θα ήταν πιστός, πλήρης και ουσιωδώς επί. Αποτυγχάνει στο ουσιωδώς επί, και το αντιπαράδειγμα της S_3 δείχνει ότι το εμπόδιο είναι πραγματικό, αφού καμία αβελιανή ομάδα δεν καλύπτει τη θέση της. Οι **Ab** και **Grp** δεν είναι ισοδύναμες μέσω του ι. Ότι δεν είναι ισοδύναμες μέσω κανενός συναρτητή απαιτεί βαθύτερα επιχειρήματα, και δεν το ζητά η άσκηση.

7.8 - Μια κατηγορία που δεν είναι ισοδύναμη με την 1

i. Οι συνθέσεις που ορίζονται είναι όλες με ταυτοτικούς, $f \circ e_0 = f$, $e_1 \circ f = f$, $g \circ e_0 = g$, $e_1 \circ g = g$, $e_0 \circ e_0 = e_0$ και $e_1 \circ e_1 = e_1$. Επειδή $\mathcal{E}(1, 0) = \varnothing$, δεν υπάρχουν άλλες συνθέσιμες τριάδες πέραν αυτών που περιέχουν ταυτοτικούς, οπότε η προσεταιριστικότητα ικανοποιείται αυτόματα. Τα δεδομένα ορίζουν κατηγορία.

ii. Ναι. Το $\mathbf{1}$ έχει ένα μόνο αντικείμενο, το $*$, και $* = H(0)$, άρα κάθε αντικείμενο του $\mathbf{1}$ είναι εικόνα.

iii. Όχι. Η $H_{0,1} : \mathcal{E}(0,1) \to \mathbf{1}(*,*)$ αντιστοιχίζει και το f και το g στο id_*, ενώ $f \neq g$. Η $H_{0,1}$ δεν είναι έρριψη.

iv. Όχι. Η πληρότητα απαιτεί επιρριπτικότητα για *κάθε* ζεύγος αντικειμένων. Για το ζεύγος $(1,0)$ έχουμε

$$H_{1,0} : \mathcal{E}(1,0) = \varnothing \longrightarrow \mathbf{1}(*,*) = \{\mathrm{id}_*\}.$$

Η απεικόνιση από το κενό σύνολο προς μη κενό σύνολο δεν είναι επίρριψη, αφού το id_* δεν προέρχεται από κανέναν μορφισμό $1 \to 0$, επειδή τέτοιος δεν υπάρχει.

v. Ο H είναι ο *μοναδικός* συναρτητής $\mathcal{E} \to \mathbf{1}$, γιατί δεν υπάρχει άλλη επιλογή ούτε στα αντικείμενα ούτε στους μορφισμούς. Από το (iii) ο μοναδικός αυτός συναρτητής δεν είναι πιστός, άρα κανένας συναρτητής $\mathcal{E} \to \mathbf{1}$ δεν είναι πιστός.

Αν ίσχυε $\mathcal{E} \simeq \mathbf{1}$, η ισοδυναμία θα περιλάμβανε συναρτητή $\mathcal{E} \to \mathbf{1}$, ο οποίος σύμφωνα με τον χαρακτηρισμό των ισοδυναμιών του Κεφαλαίου 7 θα ήταν πιστός και πλήρης. Αυτό είναι αδύνατο, και άρα $\mathcal{E} \not\simeq \mathbf{1}$. □

7.9 - Ανάκλαση ισομορφισμών

i. Έστω $F(f)$ ισομορφισμός με αντίστροφο $h : F(B) \to F(A)$. Επειδή ο F είναι πλήρης, υπάρχει $g : B \to A$ με $F(g) = h$. Τότε

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) = h \circ F(f) = \mathrm{id}_{F(A)} = F(\mathrm{id}_A),$$

και από την πιστότητα $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Ομοίως

$$F(f \circ g) = F(f) \circ h = \mathrm{id}_{F(B)} = F(\mathrm{id}_B),$$

και από την πιστότητα $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Άρα ο f είναι ισομορφισμός, δηλαδή ο F ανακλά ισομορφισμούς. □

ii. Ο $\iota : \mathbf{Ab} \hookrightarrow \mathbf{Grp}$ είναι πλήρης και πιστός (Άσκηση 7.7) αλλά όχι ουσιωδώς επί. Η ανάκλαση ισχύει. Αν $f : A \to B$ είναι ομομορφισμός αβελιανών ομάδων και ο $\iota(f)$ είναι ισομορφισμός στη $\mathbf{Grp}$, ο αντίστροφός του είναι ομομορφισμός μεταξύ των ίδιων αβελιανών ομάδων, άρα μορφισμός της $\mathbf{Ab}$, και ο f είναι ισομορφισμός στην $\mathbf{Ab}$. Το ουσιωδώς επί δεν παίζει κανέναν ρόλο στην ανάκλαση.

iii. Αν οι F, G ορίζουν ισοδυναμία, ο F είναι πλήρης και πιστός από τον χαρακτηρισμό των ισοδυναμιών του Κεφαλαίου 7. Η μία κατεύθυνση είναι το (i), δηλαδή αν ο $F(f)$ είναι ισομορφισμός, τότε ο f είναι ισομορφισμός. Η άλλη είναι η γνωστή διατήρηση. Αν ο f είναι ισομορφισμός, κάθε συναρτητής αντιστοιχίζει τον f σε ισομορφισμό. Άρα ο f είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν ο $F(f)$ είναι ισομορφισμός. □

7.10 - Ο οιονεί αντίστροφος δίνει ουσιωδώς επί συναρτητή

Έστω Y αντικείμενο της $\mathcal{D}$. Θέτουμε $X = G(Y) \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$. Η συνιστώσα του φυσικού ισομορφισμού ε στο Y είναι ισομορφισμός

$$\varepsilon_Y : F(G(Y)) \xrightarrow{\sim} Y,$$

δηλαδή $F(X) = F(G(Y)) \cong Y$. Άρα για κάθε Y υπάρχει X με $F(X) \cong Y$, και ο F είναι ουσιωδώς επί. □

7.11 - Διατήρηση ισομορφισμού αντικειμένων υπό ισοδυναμία

($\Rightarrow$) Αν $A \cong B$ μέσω ισομορφισμού $i : A \to B$, τότε ο $F(i)$ είναι ισομορφισμός, αφού οι συναρτητές διατηρούν ισομορφισμούς. Άρα $F(A) \cong F(B)$.

($\Leftarrow$) Έστω $h : F(A) \to F(B)$ ισομορφισμός. Ο F, ως μέρος ισοδυναμίας, είναι πλήρης, άρα υπάρχει $f : A \to B$ με $F(f) = h$. Ο $F(f)$ είναι ισομορφισμός. Ο F είναι επίσης πιστός, άρα ανακλά ισομορφισμούς (Άσκηση 7.9(i)), και ο f είναι ισομορφισμός. Άρα $A \cong B$. □

7.12 - Τελικό αντικείμενο υπό ισοδυναμία

i. Έστω Y τυχαίο αντικείμενο της $\mathcal{D}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ακριβώς ένας μορφισμός $Y \to F(T)$.

Ύπαρξη. Ο F είναι ουσιωδώς επί, άρα υπάρχει $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ και ισομορφισμός $i : Y \to F(X)$. Το T είναι τελικό, άρα υπάρχει $t : X \to T$. Ο μορφισμός $F(t) \circ i : Y \to F(T)$ υπάρχει.

Μοναδικότητα. Έστω $u, v : Y \to F(T)$. Τότε τα $u \circ i^{-1}$ και $v \circ i^{-1}$ είναι μορφισμοί $F(X) \to F(T)$. Ο F είναι πλήρης, άρα υπάρχουν $p, q : X \to T$ με $F(p) = u \circ i^{-1}$ και $F(q) = v \circ i^{-1}$. Το T είναι τελικό, άρα $p = q$, οπότε $F(p) = F(q)$, δηλαδή $u \circ i^{-1} = v \circ i^{-1}$. Συνθέτοντας με το i δεξιά παίρνουμε $u = v$.

Άρα το $F(T)$ είναι τελικό αντικείμενο στη $\mathcal{D}$. □

ii. Αν η $\mathcal{C}$ έχει τελικό αντικείμενο και $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$, τότε από το (i) και η $\mathcal{D}$ έχει τελικό αντικείμενο. Η ύπαρξη τελικού αντικειμένου διατυπώνεται αποκλειστικά με μορφισμούς και μοναδικότητα, γι' αυτό και μεταφέρεται μέσω της ισοδυναμίας. Είναι κατηγορική ιδιότητα.

7.13 - Σκελετός poset

i. Δύο αντικείμενα a, b είναι ισόμορφα αν υπάρχουν βέλη $a \to b$ και $b \to a$, δηλαδή $a \leq b$ και $b \leq a$. Από την αντισυμμετρικότητα, $a = b$. Σε poset η ισομορφία αντικειμένων σημαίνει ισότητα.

ii. Κάθε κλάση ισομορφίας είναι μονοσύνολο, άρα ο σκελετός περιέχει όλα τα στοιχεία και $\mathrm{Sk}(P) = P$.

iii. Ο εγκλεισμός $\iota : \mathrm{Sk}(P) \hookrightarrow P$ είναι ο ταυτοτικός συναρτητής του P, άρα ισομορφισμός κατηγοριών, και κατά μείζονα λόγο ισοδυναμία. Είναι πιστός και πλήρης, αφού τα Hom-σύνολα ταυτίζονται, και ουσιωδώς επί, αφού κάθε a είναι ίσο με την εικόνα του.

iv. Η σχέση $a \preceq b$ όταν $|a| \leq |b|$ στο $\mathbb{Z}$ είναι ανακλαστική και μεταβατική, αλλά όχι αντισυμμετρική, αφού $1 \preceq -1$ και $-1 \preceq 1$ με $1 \neq -1$. Ορίζει κατηγορία με αντικείμενα τους ακεραίους και ένα βέλος $a \to b$ όταν $a \preceq b$.

Δύο ακέραιοι a, b είναι ισόμορφοι όταν $a \preceq b$ και $b \preceq a$, δηλαδή όταν $|a| = |b|$. Οι κλάσεις ισομορφίας είναι οι $\{0\}$ και οι $\{n, -n\}$ για $n \geq 1$. Επιλέγουμε έναν αντιπρόσωπο από κάθε κλάση, για παράδειγμα τον μη αρνητικό. Ο σκελετός είναι η πλήρης υποκατηγορία με αντικείμενα τους $0, 1, 2, \ldots$, με βέλος $a \to b$ όταν $|a| \leq |b|$, δηλαδή όταν $a \leq b$. Είναι λοιπόν το poset $(\mathbb{N}, \leq)$.

Στο (ii) ο σκελετός ενός poset ταυτίζεται με το ίδιο το poset. Εδώ ο σκελετός είναι γνήσια μικρότερος, γιατί οι ισόμορφοι ακέραιοι n και $-n$ συμπτύσσονται σε ένα αντικείμενο. Ο εγκλεισμός $\mathrm{Sk} \hookrightarrow (\mathbb{Z}, \leq)$ είναι ισοδυναμία κατηγοριών, αλλά όχι ισομορφισμός, αφού δεν είναι επί στα αντικείμενα. Το παράδειγμα δείχνει ότι η ισομορφία αντικειμένων ανάγεται σε ισότητα μόνο για σχέσεις που είναι αντισυμμετρικές.

7.14 - Ισοδυναμία κατηγοριών ως σχέση ισοδυναμίας

i. *Ανακλαστικότητα.* Παίρνουμε $F = G = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$. Τότε $G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ αυστηρά, άρα και φυσικά ισόμορφα, και $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}$.

ii. *Συμμετρία.* Ο ορισμός είναι συμμετρικός ως προς τα δεδομένα. Αν οι $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ και $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ικανοποιούν $G \circ F \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ και $F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, τα ίδια δεδομένα, διαβασμένα με τον G πρώτο, δίνουν $\mathcal{D} \simeq \mathcal{C}$.

iii. *Μεταβατικότητα.* Έστω $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ και $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ με φυσικούς ισομορφισμούς

$$\alpha : G \circ F \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \qquad \beta : F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{B}},$$

και $H : \mathcal{B} \to \mathcal{C}, K : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ με φυσικούς ισομορφισμούς

$$\gamma : K \circ H \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}, \qquad \delta : H \circ K \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}.$$

Θα δείξουμε ότι οι $H \circ F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ και $G \circ K : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ορίζουν ισοδυναμία.

Πρώτος ισομορφισμός. Σύνθεση του γ με συναρτητές (Άσκηση 6.7) δίνει τον μετασχηματισμό

$$G\gamma F : G \circ K \circ H \circ F \Rightarrow G \circ F, \qquad (G\gamma F)_A = G\big(\gamma_{F(A)}\big).$$

Κάθε συνιστώσα είναι ισομορφισμός, ως εικόνα ισομορφισμού από συναρτητή. Η κατακόρυφη σύνθεση

$$\alpha \circ (G\gamma F) : (G \circ K) \circ (H \circ F) \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$$

έχει συνιστώσες $\alpha_A \circ G(\gamma_{F(A)})$, που είναι ισομορφισμοί ως συνθέσεις ισομορφισμών. Είναι φυσικός μετασχηματισμός από την Άσκηση 6.3, άρα $(G \circ K) \circ (H \circ F) \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$.

Δεύτερος ισομορφισμός. Με τον ίδιο τρόπο, ο μετασχηματισμός

$$H\beta K : H \circ F \circ G \circ K \Rightarrow H \circ K, \qquad (H\beta K)_C = H\big(\beta_{K(C)}\big),$$

έχει συνιστώσες ισομορφισμούς. Η σύνθεση $\delta \circ (H\beta K)$ έχει συνιστώσες $\delta_C \circ H(\beta_{K(C)})$ και δίνει $(H \circ F) \circ (G \circ K) \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$.

Άρα $\mathcal{A} \simeq \mathcal{C}$. □

7.15 - Ο συναρτητής

i. Ένας συναρτητής $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ είναι μια αντιστοίχιση αντικειμένων σε αντικείμενα και μορφισμών σε μορφισμούς που σέβεται τη δομή της κατηγορίας.

ii. Στα αντικείμενα αντιστοιχίζει κάθε A στο $F(A) \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$.

iii. Στους μορφισμούς αντιστοιχίζει κάθε $f : A \to B$ στον $F(f) : F(A) \to F(B)$, με συμβατές πηγές και στόχους.

iv. Τα δύο αξιώματα είναι $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ (διατήρηση σύνθεσης) και $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$ (διατήρηση ταυτοτικών).

v. Επειδή διατηρεί συνθέσεις και ταυτοτικούς, ο F μεταφέρει ολόκληρα αντιμεταθετικά διαγράμματα της $\mathcal{C}$ σε αντιμεταθετικά διαγράμματα της $\mathcal{D}$ και αντιστοιχίζει ισομορφισμούς σε ισομορφισμούς. Μεταφράζει τις σχέσεις μεταξύ των μορφισμών και όχι απλώς τα μεμονωμένα βέλη.

7.16 - Ο φυσικός μετασχηματισμός

i. Ένας φυσικός μετασχηματισμός $\eta : F \Rightarrow G$ είναι μια οικογένεια μορφισμών της $\mathcal{D}$, μία για κάθε αντικείμενο της $\mathcal{C}$, συμβατή με όλους τους μορφισμούς της $\mathcal{C}$.

ii. Η συνιστώσα στο A είναι μορφισμός $\eta_A : F(A) \to G(A)$ στην $\mathcal{D}$.

iii. Το τετράγωνο φυσικότητας για $f : A \to B$ είναι

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ {\scriptstyle \eta_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_B} \\ G(A) & \xrightarrow[G(f)]{} & G(B) \end{array}$$

δηλαδή $G(f) \circ \eta_A = \eta_B \circ F(f)$.

7.17 - Η κατακόρυφη σύνθεση

i. Η $\beta \circ \alpha : F \Rightarrow H$ ορίζεται κατά συνιστώσες.

ii. Η συνιστώσα της στο A είναι $(\beta \circ \alpha)_A = \beta_A \circ \alpha_A : F(A) \to H(A)$.

iii. Το μεγάλο ορθογώνιο φυσικότητας της $\beta \circ \alpha$ χωρίζεται σε δύο τετράγωνα, το ένα δίπλα στο άλλο, το τετράγωνο της α και το τετράγωνο της β. Καθένα αντιμετατίθεται, άρα και το ορθογώνιο (βλ. Άσκηση 6.3 για τον ρητό υπολογισμό).

7.18 - Ο φυσικός ισομορφισμός

i. Ο η είναι φυσικός ισομορφισμός αν κάθε συνιστώσα $\eta_A : F(A) \to G(A)$ είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{D}$.

ii. Από τη φυσικότητα της η για τυχαίο $f : A \to B$ έχουμε $\eta_B \circ F(f) = G(f) \circ \eta_A$. Συνθέτουμε αριστερά με $(\eta_B)^{-1}$ και δεξιά με $(\eta_A)^{-1}$ και παίρνουμε

$$F(f) \circ (\eta_A)^{-1} = (\eta_B)^{-1} \circ G(f),$$

που είναι το τετράγωνο φυσικότητας της οικογένειας $\big((\eta_A)^{-1}\big)$. Άρα ο η^{-1} είναι φυσικός μετασχηματισμός (βλ. και Άσκηση 6.4(i)). □

iii. Η γραφή $G \circ F \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ σημαίνει ότι υπάρχει φυσικός ισομορφισμός $\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$, δηλαδή οικογένεια ισομορφισμών $\eta_A : A \to G(F(A))$ που ικανοποιεί το τετράγωνο φυσικότητας για κάθε μορφισμό της $\mathcal{C}$.

7.19 - Η κατηγορία συναρτητών

i. Η σύνθεση στην $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ είναι η κατακόρυφη σύνθεση φυσικών μετασχηματισμών.

ii. Ο ταυτοτικός μορφισμός του F είναι ο id_F με συνιστώσες $(\mathrm{id}_F)_A = \mathrm{id}_{F(A)} : F(A) \to F(A)$.

iii. Ισομορφισμός στην $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ είναι μορφισμός $\eta : F \Rightarrow G$ με αμφίπλευρο αντίστροφο ως προς την κατακόρυφη σύνθεση. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν κάθε συνιστώσα η_A είναι ισομορφισμός, δηλαδή οι ισομορφισμοί της $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ είναι ακριβώς οι φυσικοί ισομορφισμοί της Άσκησης 7.18.

iv. Ο ισομορφισμός $G \circ F \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ ανήκει στην κατηγορία συναρτητών $[\mathcal{C}, \mathcal{C}]$, και αντίστοιχα ο $F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ στην $[\mathcal{D}, \mathcal{D}]$.

7.20 - Η κατηγορία Cat

i. Τα αντικείμενα είναι οι μικρές κατηγορίες, δηλαδή εκείνες των οποίων τα αντικείμενα και οι μορφισμοί σχηματίζουν σύνολο.

ii. Οι μορφισμοί είναι οι συναρτητές μεταξύ κατηγοριών.

iii. Η σύνθεση είναι η σύνθεση συναρτητών, $(G \circ F)(A) = G(F(A))$ και $(G \circ F)(f) = G(F(f))$. Η $G \circ F$ είναι συναρτητής, γιατί

$$(G \circ F)(g \circ f) = G\big(F(g) \circ F(f)\big) = (G \circ F)(g) \circ (G \circ F)(f),$$

$$(G \circ F)(\mathrm{id}_A) = G(\mathrm{id}_{F(A)}) = \mathrm{id}_{G(F(A))}.$$

Η σύνθεση είναι προσεταιριστική, αφού ορίζεται σημειακά. Στα αντικείμενα και στα βέλη οι $(H \circ G) \circ F$ και $H \circ (G \circ F)$ δίνουν και οι δύο $H(G(F(-)))$.

iv. Οι ταυτοτικοί μορφισμοί είναι οι ταυτοτικοί συναρτητές $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ με $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(A) = A$ και $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(f) = f$. Δρουν ουδέτερα στη σύνθεση, γιατί $F \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} = F = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \circ F$.

7.21 - Οιονεί αντίστροφοι

i. Οι F και G είναι οιονεί αντίστροφοι αν καθένας αναιρεί τον άλλον ως προς φυσικό ισομορφισμό και όχι αναγκαστικά ως προς ισότητα.

ii. Απαιτούνται φυσικοί ισομορφισμοί

$$\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F, \qquad \varepsilon : F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}.$$

iii. Οι κατηγορίες είναι ισοδύναμες, $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$.

7.22 - Σκελετός της Grp

i. Δύο ομάδες είναι ισόμορφες ως αντικείμενα της **Grp** ακριβώς όταν είναι ισόμορφες ως ομάδες. Ο σκελετός $\mathrm{Sk}(\mathbf{Grp})$ περιέχει ακριβώς μία ομάδα από κάθε κλάση ισομορφίας.

ii. Κάθε πεπερασμένη κυκλική ομάδα τάξης n είναι ισόμορφη με την $\mathbb{Z}_n$, και $\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_n$ μόνο για $m = n$. Ο αντιπρόσωπος κάθε κλάσης είναι λοιπόν η $\mathbb{Z}_n$, και ο σκελετός της πλήρους υποκατηγορίας των πεπερασμένων κυκλικών ομάδων είναι η πλήρης υποκατηγορία με αντικείμενα $\{\mathbb{Z}_n \mid n \geq 1\}$.

iii. Ο εγκλεισμός είναι πιστός, όπως κάθε εγκλεισμός. Είναι πλήρης εκ κατασκευής, αφού ο σκελετός είναι *πλήρης* υποκατηγορία και κρατά όλα τα Hom-σύνολα μεταξύ των αντικειμένων που επιλέχθηκαν. Είναι ουσιωδώς επί, αφού κάθε ομάδα G είναι ισόμορφη με τον αντιπρόσωπο της κλάσης της, που ανήκει στον σκελετό. Άρα ο ι είναι ισοδυναμία κατηγοριών. □

iv. Οι ισοδυναμίες διατηρούν τις ιδιότητες που διατυπώνονται στη γλώσσα αντικειμένων, μορφισμών, σύνθεσης και μοναδικότητας. Επομένως κάθε τέτοια ιδιότητα της **Grp** μπορεί να μελετηθεί στον σκελετό της, όπου η ισομορφία αντικειμένων έχει αναχθεί σε ισότητα.

7.23 - Σύνθεση των ιδεών

Τα πέντε επίπεδα εκφράζουν διαδοχικές μετατοπίσεις της προσοχής.

Επίπεδο	**Τι εκφράζει**
Αντικείμενα	Τι υπάρχει σε έναν μαθηματικό κόσμο.
Μορφισμοί	Πώς συνδέονται τα αντικείμενα, αφού τα αντικείμενα γίνονται πηγές και στόχοι.
Συναρτητές	Πώς μεταφράζεται ολόκληρος ένας κόσμος σε έναν άλλον, με σεβασμό στη δομή.
Φυσικοί μετασχηματισμοί	Πώς συγκρίνονται δύο μεταφράσεις μεταξύ των ίδιων κόσμων.
Ισοδυναμίες	Πότε δύο κόσμοι είναι «ίδιοι» με τον χαλαρό, κατηγορικό τρόπο.

Κάθε επίπεδο μετατρέπει το προηγούμενο σε πρώτη ύλη. Οι μορφισμοί οργανώνονται σε κατηγορίες, και οι κατηγορίες γίνονται αντικείμενα της **Cat** με μορφισμούς τους συναρτητές. Οι συναρτητές, με τη σειρά τους, γίνονται αντικείμενα της κατηγορίας $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ με μορφισμούς τους φυσικούς μετασχηματισμούς.

Κάθε επίπεδο περιέχει επιπλέον το προηγούμενο ως ειδική περίπτωση. Ένα αντικείμενο A της $\mathcal{C}$ είναι ένας συναρτητής $\mathbf{1} \to \mathcal{C}$, και ένας μορφισμός $f : A \to B$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός μεταξύ των δύο τέτοιων συναρτητών, αφού η $\mathbf{1}$ έχει μόνο το ταυτοτικό βέλος και η συνθήκη φυσικότητας ισχύει αυτόματα. Ένας συναρτητής F είναι ο ταυτοτικός φυσικός μετασχηματισμός id_F του εαυτού του. Ένας ισομορφισμός κατηγοριών είναι ισοδυναμία στην οποία οι φυσικοί ισομορφισμοί είναι ταυτοτικοί. Οι ισοδυναμίες είναι έτσι οι «ισομορφισμοί» της **Cat** όπου η ισότητα συναρτητών έχει χαλαρώσει σε φυσικό ισομορφισμό. Πρόκειται για την ίδια μετατόπιση από την ισότητα στην ισομορφία που μας οδήγησε από τα σύνολα στις κατηγορίες, εφαρμοσμένη τώρα ένα επίπεδο ψηλότερα.