Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 6

6.1 - Επαλήθευση φυσικότητας

i. Θεωρούμε τα σύνολα $A = \{0, 1\}$ και $B = \{0, 1, 2\}$. Ορίζουμε την οικογένεια (η_X) σε όλα τα σύνολα ως εξής. Η η_A είναι η αντιμετάθεση $(0 \mapsto 1, 1 \mapsto 0)$, και για κάθε άλλο σύνολο X θέτουμε $\eta_X = \mathrm{id}_X$, άρα $\eta_B = \mathrm{id}_B$.

Θεωρούμε την ένταξη $f : A \to B$ με $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Τότε

$$(\eta_B \circ f)(0) = \eta_B(0) = 0, \qquad (f \circ \eta_A)(0) = f(1) = 1.$$

Άρα $\eta_B \circ f \neq f \circ \eta_A$ και το τετράγωνο φυσικότητας αποτυγχάνει. Η οικογένεια (η_X) δεν είναι φυσικός μετασχηματισμός $\mathrm{Id} \Rightarrow \mathrm{Id}$.

ii. Έστω $F = \mathrm{Id}_{\mathbf{Set}}$ και $G = \mathcal{P}$ ο συναλλοίωτος συναρτητής δυναμοσυνόλου, με $G(f)(X) = f(X)$ (ευθεία εικόνα). Ορίζουμε

$$\eta_A : A \to \mathcal{P}(A), \qquad \eta_A(a) = A,$$

δηλαδή κάθε στοιχείο αντιστοιχίζεται σε ολόκληρο το σύνολο.

Έστω $f : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$ η σταθερή $f(x) = 0$. Τότε για κάθε a

$$(\eta_B \circ f)(a) = \{0, 1\}, \qquad \big(\mathcal{P}(f) \circ \eta_A\big)(a) = f(\{0, 1\}) = \{0\}.$$

Τα δύο μέλη διαφέρουν, άρα η φυσικότητα αποτυγχάνει. Γενικότερα, για $A \neq \varnothing$ τα δύο μέλη είναι τα B και $f(A)$, και το τετράγωνο αντιμετατίθεται ακριβώς όταν η f είναι επίρριψη.

Αντίθετα, η οικογένεια $\eta_A(a) = \{a\}$ είναι φυσική, αφού $(\eta_B \circ f)(a) = \{f(a)\} = f(\{a\}) = (\mathcal{P}(f) \circ \eta_A)(a)$. Η πρώτη οικογένεια χρησιμοποιεί ολόκληρο το A, δηλαδή δεδομένο που εξαρτάται από το συγκεκριμένο σύνολο και όχι από τη δομή. Η δεύτερη κατασκευάζεται ομοιόμορφα από το a.

6.2 - Φυσικοί μετασχηματισμοί σε κατηγορία δύο αντικειμένων

i. Το τετράγωνο φυσικότητας για το ι είναι

$$\begin{array}{ccc} F(0) & \xrightarrow{F(\iota)} & F(1) \\ {\scriptstyle \eta_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_1} \\ G(0) & \xrightarrow[G(\iota)]{} & G(1) \end{array}$$

δηλαδή $\eta_1 \circ F(\iota) = G(\iota) \circ \eta_0$. Αναλυτικά, στα στοιχεία του $F(0) = \{a, b\}$ έχουμε

$$\eta_1(x) = G(\iota)\big(\eta_0(a)\big), \qquad \eta_1(y) = G(\iota)\big(\eta_0(b)\big).$$

Για τους ταυτοτικούς μορφισμούς της $\mathbf{2}$ δεν υπάρχει άλλη συνθήκη, αφού το αντίστοιχο τετράγωνο έχει δύο ταυτοτικά βέλη και αντιμετατίθεται πάντα.

ii. Η $\eta_0 : \{a, b\} \to \{p, q\}$ επιλέγεται ελεύθερα, με $2^2 = 4$ δυνατότητες. Για κάθε επιλογή, οι τιμές $\eta_1(x)$ και $\eta_1(y)$ καθορίζονται μοναδικά από τις παραπάνω σχέσεις. Το z δεν ανήκει στην εικόνα της $F(\iota)$, οπότε η τιμή $\eta_1(z) \in \{r, s\}$ δεν περιορίζεται από τη φυσικότητα και έχουμε 2 δυνατότητες. Συνολικά υπάρχουν $4 \times 2 = 8$ φυσικοί μετασχηματισμοί $F \Rightarrow G$.

Τους περιγράφουμε όλους ως εξής. Αν $\eta_0(a) = u$ και $\eta_0(b) = v$ με $u, v \in \{p, q\}$, τότε

$$\eta_1(x) = \begin{cases} r, & u = p, \\ s, & u = q, \end{cases} \qquad \eta_1(y) = \begin{cases} r, & v = p, \\ s, & v = q, \end{cases} \qquad \eta_1(z) \in \{r, s\}.$$

iii. Ναι, η η_0 μπορεί να είναι οποιαδήποτε συνάρτηση $F(0) \to G(0)$. Για κάθε επιλογή της, οι σχέσεις του (i) ορίζουν κατάλληλες τιμές $\eta_1(x)$ και $\eta_1(y)$ ώστε να ικανοποιείται η φυσικότητα. Οι περιορισμοί κατανέμονται λοιπόν ασύμμετρα. Η η_0 είναι ελεύθερη, ενώ η η_1 δεσμεύεται πλήρως στα στοιχεία της εικόνας της $F(\iota)$ και παραμένει ελεύθερη μόνο στο z.

Η ελευθερία της η_0 οφείλεται στο ότι η $F(\iota)$ είναι ερριπτική. Αν είχαμε $F(\iota)(a) = F(\iota)(b)$, η φυσικότητα θα απαιτούσε $G(\iota)(\eta_0(a)) = G(\iota)(\eta_0(b))$, και επειδή η $G(\iota)$ είναι ερριπτική, θα έπρεπε $\eta_0(a) = \eta_0(b)$. Τότε η η_0 θα περιοριζόταν και αυτή.

6.3 - Κατακόρυφη σύνθεση

i. Οι συνιστώσες $\alpha_A : F(A) \to G(A)$ και $\beta_A : G(A) \to H(A)$ είναι συνθέσιμες στην $\mathcal{D}$. Ορίζουμε λοιπόν τη σύνθεση κατά συνιστώσες

$$(\beta \circ \alpha)_A := \beta_A \circ \alpha_A : F(A) \to H(A).$$

ii. Για κάθε $f : A \to B$ στην $\mathcal{C}$ έχουμε

$$H(f) \circ (\beta \circ \alpha)_A = H(f) \circ \beta_A \circ \alpha_A$$

$$
\begin{aligned}
&= \beta_B \circ G(f) \circ \alpha_A && \text{(φυσικότητα της } \beta\text{)} \\
&= \beta_B \circ \alpha_B \circ F(f) && \text{(φυσικότητα της } \alpha\text{)} \\
&= (\beta \circ \alpha)_B \circ F(f).
\end{aligned}
$$

Το μεγάλο ορθογώνιο αντιμετατίθεται, άρα η $\beta \circ \alpha$ είναι φυσικός μετασχηματισμός. □

6.4 - Φυσικοί ισομορφισμοί

i. Έστω $f : A \to B$. Από τη φυσικότητα της η έχουμε

$$\eta_B \circ F(f) = G(f) \circ \eta_A.$$

Συνθέτουμε δεξιά με $(\eta_A)^{-1}$ και αριστερά με $(\eta_B)^{-1}$ και παίρνουμε

$$F(f) \circ (\eta_A)^{-1} = (\eta_B)^{-1} \circ G(f).$$

Αυτό είναι ακριβώς το τετράγωνο φυσικότητας της οικογένειας $\big((\eta_A)^{-1}\big)$, άρα αυτή ορίζει φυσικό μετασχηματισμό $\eta^{-1} : G \Rightarrow F$. □

ii. *$O\,V \cong V^{**}$ είναι φυσικός.* Ορίζουμε $\eta_V : V \to V^{**}$ με $\eta_V(v)(\phi) = \phi(v)$ για $v \in V$ και $\phi \in V^*$. Η η_V είναι ισομορφισμός όταν ο V έχει πεπερασμένη διάσταση, ενώ η φυσικότητα ισχύει για κάθε διανυσματικό χώρο. Για γραμμική $f : V \to W$ ελέγχουμε ότι $\eta_W \circ f = f^{**} \circ \eta_V$. Για $v \in V$ και $\psi \in W^*$ έχουμε

$$\big(\eta_W(f(v))\big)(\psi) = \psi(f(v)),$$

$$
\begin{aligned}
\big(f^{**}(\eta_V(v))\big)(\psi) = \eta_V(v)\big(f^*(\psi)\big) &= \eta_V(v)(\psi \circ f) \\
&= (\psi \circ f)(v) = \psi(f(v)).
\end{aligned}
$$

Τα δύο μέλη συμπίπτουν, χωρίς καμία επιλογή βάσης. □

$O\,V \cong V^*$ δεν είναι φυσικός. Το πρώτο εμπόδιο εμφανίζεται πριν από κάθε υπολογισμό. Ο $(-)^*$ είναι ανταλλοίωτος συναρτητής, άρα για γραμμική $f : V \to W$ ο f^* έχει φορά $W^* \to V^*$. Το τετράγωνο φυσικότητας $\eta_W \circ f = (\,\cdot\,) \circ \eta_V$ δεν σχηματίζεται, γιατί δεν υπάρχει βέλος $V^* \to W^*$ να μπει στη θέση της τελείας. Η μόνη συνθήκη με σωστές φορές που μπορούμε να διατυπώσουμε είναι η

$$\eta_V = f^* \circ \eta_W \circ f : V \to V^*,$$

που ζητά από την η να είναι συμβατή με κάθε f. Για ισομορφισμό f είναι ισοδύναμη με $\eta_W \circ f = (f^*)^{-1} \circ \eta_V$, και αυτή είναι η μορφή που εξετάζουμε στο (iii).

iii. Ο $\mathbb{R}^*$ είναι ο χώρος των γραμμικών απεικονίσεων $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Για $f(x) = \lambda x$ και κάθε $\psi \in \mathbb{R}^*$ η γραμμικότητα της ψ δίνει

$$f^*(\psi)(x) = \psi(\lambda x) = \lambda\, \psi(x),$$

δηλαδή $f^* = \lambda\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^*}$ και $(f^*)^{-1} = \lambda^{-1}\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^*}$. Το τετράγωνο φυσικότητας $\eta_{\mathbb{R}} \circ f = (f^*)^{-1} \circ \eta_{\mathbb{R}}$ γράφεται, στο τυχαίο $x \in \mathbb{R}$,

$$\eta_{\mathbb{R}}(\lambda x) = \lambda^{-1}\, \eta_{\mathbb{R}}(x).$$

Επειδή η $\eta_{\mathbb{R}}$ είναι γραμμική, το αριστερό μέλος ισούται με $\lambda\, \eta_{\mathbb{R}}(x)$. Άρα το τετράγωνο αντιμετατίθεται αν και μόνο αν

$$(\lambda - \lambda^{-1})\, \eta_{\mathbb{R}}(x) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Η $\eta_{\mathbb{R}}$ είναι ισομορφισμός, άρα $\eta_{\mathbb{R}}(1) \neq 0$, και ο $\mathbb{R}^*$ είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος. Η συνθήκη ισχύει λοιπόν αν και μόνο αν $\lambda = \lambda^{-1}$, δηλαδή $\lambda^2 = 1$.

Για $\lambda = 2$ το τετράγωνο δεν αντιμετατίθεται. Στο επιχείρημα χρησιμοποιήσαμε μόνο ότι η $\eta_{\mathbb{R}}$ είναι γραμμική και μη μηδενική, άρα καμία επιλογή του $\eta_{\mathbb{R}}$ δεν σώζει τη φυσικότητα. Κάθε συγκεκριμένος ισομορφισμός $V \cong V^*$ απαιτεί επιλογή βάσης, και η επιλογή αυτή δεν γίνεται ομοιόμορφα. □

6.5 - Φυσικότητα σε posets

i. ($\Rightarrow$) Αν υπάρχει $\eta : F \Rightarrow G$, κάθε συνιστώσα $\eta_x : F(x) \to G(x)$ είναι βέλος στο Q, δηλαδή $F(x) \leq G(x)$ για κάθε $x \in P$.

($\Leftarrow$) Αν $F(x) \leq G(x)$ για κάθε x, ορίζουμε η_x το μοναδικό βέλος $F(x) \to G(x)$. Για τη φυσικότητα, έστω $x \leq y$ στο P. Τα δύο μονοπάτια του τετραγώνου, $G(x \leq y) \circ \eta_x$ και $\eta_y \circ F(x \leq y)$, είναι βέλη του Q με πηγή $F(x)$ και στόχο $G(y)$. Στο poset Q υπάρχει το πολύ ένα βέλος μεταξύ δύο αντικειμένων, άρα τα δύο μονοπάτια ταυτίζονται και το τετράγωνο αντιμετατίθεται αυτόματα.

Μοναδικότητα. Κάθε συνιστώσα η_x είναι βέλος $F(x) \to G(x)$ στο Q, και ένα τέτοιο βέλος είναι μοναδικό. Άρα δύο φυσικοί μετασχηματισμοί $F \Rightarrow G$ έχουν τις ίδιες συνιστώσες και συμπίπτουν. □

ii. Τα αντικείμενα της $[P, Q]$ είναι οι μονότονες συναρτήσεις $P \to Q$. Από το (i), μεταξύ δύο αντικειμένων F, G υπάρχει το πολύ ένας μορφισμός, και υπάρχει ακριβώς όταν $F(x) \leq G(x)$ για κάθε x. Η σχέση $F \leq G$ του ερωτήματος είναι λοιπόν η σχέση «υπάρχει μορφισμός $F \to G$», και η $[P, Q]$ είναι προδιάταξη. Μένει να ελέγξουμε τις ιδιότητες της διάταξης.

Ανακλαστικότητα. Ισχύει $F(x) \leq F(x)$, και ο μορφισμός είναι ο id_F.

Μεταβατικότητα. Αν $F(x) \leq G(x)$ και $G(x) \leq H(x)$ για κάθε x, τότε $F(x) \leq H(x)$ για κάθε x. Ισοδύναμα, η κατακόρυφη σύνθεση της Άσκησης 6.3 δίνει μορφισμό $F \to H$.

Αντισυμμετρικότητα. Αν $F \leq G$ και $G \leq F$, τότε $F(x) \leq G(x) \leq F(x)$ και άρα $F(x) = G(x)$ για κάθε x, από την αντισυμμετρικότητα του Q. Ένας συναρτητής μεταξύ posets καθορίζεται πλήρως από τις τιμές του στα αντικείμενα, αφού κάθε σύνολο βελών έχει το πολύ ένα στοιχείο. Άρα $F = G$. □

iii. Η $F(n) = n$ είναι ο ταυτοτικός συναρτητής του $(\mathbb{N}, \leq)$. Η $G(n) = n + 1$ είναι μονότονη, αφού $n \leq m$ συνεπάγεται $n + 1 \leq m + 1$. Και οι δύο είναι λοιπόν συναρτητές.

Από την F στην G. Ισχύει $n \leq n + 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα από το (i) υπάρχει ακριβώς ένας φυσικός μετασχηματισμός $F \Rightarrow G$. Οι συνιστώσες του είναι τα βέλη $n \leq n + 1$.

Από την G στην F. Θα έπρεπε να ισχύει $n + 1 \leq n$ για κάθε n, και αυτό αποτυγχάνει για κάθε n. Άρα δεν υπάρχει κανένας φυσικός μετασχηματισμός $G \Rightarrow F$. Σε συμφωνία με το (ii), ισχύει $F \leq G$ και $F \neq G$.

6.6 - Νόμος ανταλλαγής

i. Η κατακόρυφη σύνθεση, κατά συνιστώσες, είναι

$$(\beta \circ \alpha)_A = \beta_A \circ \alpha_A : F(A) \to H(A).$$

Η οριζόντια σύνθεση $\alpha' * \alpha : F' \circ F \Rightarrow G' \circ G$ έχει συνιστώσα

$$(\alpha' * \alpha)_A = \alpha'_{G(A)} \circ F'(\alpha_A) = G'(\alpha_A) \circ \alpha'_{F(A)} : F'(F(A)) \to G'(G(A)).$$

Η ισότητα των δύο εκφράσεων είναι το τετράγωνο φυσικότητας της α' στο βέλος α_A.

ii. Υπολογίζουμε τις συνιστώσες των δύο μελών σε τυχαίο $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$.

Για το αριστερό μέλος έχουμε $\beta' \circ \alpha' : F' \Rightarrow H'$ και $\beta \circ \alpha : F \Rightarrow H$, οπότε

$$\begin{aligned}\big((\beta' \circ \alpha') * (\beta \circ \alpha)\big)_A &= (\beta' \circ \alpha')_{H(A)} \circ F'\big((\beta \circ \alpha)_A\big) \\ &= \beta'_{H(A)} \circ \alpha'_{H(A)} \circ F'(\beta_A) \circ F'(\alpha_A).\end{aligned}$$

Για το δεξιό μέλος έχουμε

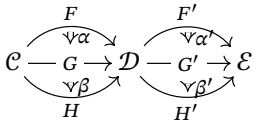
$$\begin{aligned}\big((\beta' * \beta) \circ (\alpha' * \alpha)\big)_A &= (\beta' * \beta)_A \circ (\alpha' * \alpha)_A \\ &= \beta'_{H(A)} \circ G'(\beta_A) \circ \alpha'_{G(A)} \circ F'(\alpha_A).\end{aligned}$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\alpha'_{H(A)} \circ F'(\beta_A) = G'(\beta_A) \circ \alpha'_{G(A)}.$$

Αυτό είναι ακριβώς το τετράγωνο φυσικότητας της $\alpha' : F' \Rightarrow G'$ στο βέλος $\beta_A : G(A) \to H(A)$ της $\mathcal{D}$, όπως προβλέπει η υπόδειξη. Αντικαθιστώντας, τα δύο μέλη συμπίπτουν για κάθε A. □

iii. Ο νόμος ανταλλαγής αφορά τη διάταξη



και λέει ότι το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από τη σειρά ανάγνωσης. Αν συνθέσουμε πρώτα κατακόρυφα, μέσα σε κάθε στήλη, και μετά οριζόντια, ή αν συνθέσουμε πρώτα οριζόντια, κατά ζεύγη, και μετά κατακόρυφα, καταλήγουμε στον ίδιο μετασχηματισμό $F' \circ F \Rightarrow H' \circ H$. Το πλέγμα των τεσσάρων μετασχηματισμών έχει επομένως μία μόνο συνολική τιμή, και οι δύο συνθέσεις είναι συμβατές μεταξύ τους.

6.7 - Σύνθεση συναρτητή και μετασχηματισμού

i. Ορίζουμε $H\eta : HF \Rightarrow HG$ κατά συνιστώσες,

$$(H\eta)_A := H(\eta_A) : H(F(A)) \to H(G(A)).$$

ii. Ορίζουμε $\eta K : FK \Rightarrow GK$ κατά συνιστώσες,

$$(\eta K)_A := \eta_{K(A)} : F(K(A)) \to G(K(A)), \qquad A \in \mathrm{ob}(\mathcal{B}).$$

iii. *Φυσικότητα του Hη.* Για $f : A \to B$ στην $\mathcal{C}$ έχουμε

$$\begin{aligned} HG(f) \circ (H\eta)_A &= H(G(f)) \circ H(\eta_A) = H\big(G(f) \circ \eta_A\big) \\ &= H\big(\eta_B \circ F(f)\big) = H(\eta_B) \circ H(F(f)) = (H\eta)_B \circ HF(f), \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν η διατήρηση της σύνθεσης από τον H και η φυσικότητα της η.

Φυσικότητα του ηK. Για $g : A \to B$ στην $\mathcal{B}$ εφαρμόζουμε τη φυσικότητα της η στο βέλος $K(g) : K(A) \to K(B)$ της $\mathcal{C}$ και παίρνουμε

$$GK(g) \circ (\eta K)_A = G(K(g)) \circ \eta_{K(A)} = \eta_{K(B)} \circ F(K(g)) = (\eta K)_B \circ FK(g). \quad \square$$

6.8 - Οριζόντια σύνθεση

i. Η συνιστώσα της $\mu * \eta$ στο A είναι

$$(\mu * \eta)_A = \mu_{G(A)} \circ H(\eta_A) : H(F(A)) \to K(G(A)).$$

Έστω $f : A \to B$ στην $\mathcal{C}$. Τότε

$$\begin{aligned} KG(f) \circ (\mu * \eta)_A &= K(G(f)) \circ \mu_{G(A)} \circ H(\eta_A) \\ &= \mu_{G(B)} \circ H(G(f)) \circ H(\eta_A) && \text{(φυσικότητα της } \mu) \\ &= \mu_{G(B)} \circ H\big(G(f) \circ \eta_A\big) && \text{(συναρτησιακότητα του } H) \\ &= \mu_{G(B)} \circ H\big(\eta_B \circ F(f)\big) && \text{(φυσικότητα της } \eta) \\ &= \mu_{G(B)} \circ H(\eta_B) \circ HF(f) \\ &= (\mu * \eta)_B \circ HF(f). \end{aligned}$$

Το τετράγωνο φυσικότητας αντιμετατίθεται, άρα η $\mu * \eta$ είναι φυσικός μετασχηματισμός $H \circ F \Rightarrow K \circ G$. $\square$

ii. Με τον συμβολισμό της Άσκησης 6.7 έχουμε $H\eta : HF \Rightarrow HG$ και $\mu G : HG \Rightarrow KG$, με συνιστώσες $(H\eta)_A = H(\eta_A)$ και $(\mu G)_A = \mu_{G(A)}$. Επίσης $\mu F : HF \Rightarrow$

KF και $K\eta : KF \Rightarrow KG$, με συνιστώσες $(\mu F)_A = \mu_{F(A)}$ και $(K\eta)_A = K(\eta_A)$. Οι κατακόρυφες συνθέσεις έχουν συνιστώσες

$$\big((\mu G) \circ (H\eta)\big)_A = \mu_{G(A)} \circ H(\eta_A), \qquad \big((K\eta) \circ (\mu F)\big)_A = K(\eta_A) \circ \mu_{F(A)}.$$

Η πρώτη είναι η $(\mu * \eta)_A$ του (i). Η ισότητα των δύο εκφράσεων

$$\mu_{G(A)} \circ H(\eta_A) = K(\eta_A) \circ \mu_{F(A)}$$

είναι ακριβώς το τετράγωνο φυσικότητας της μ στο βέλος $\eta_A : F(A) \to G(A)$ της $\mathcal{D}$,

$$\begin{array}{ccc} H(F(A)) & \xrightarrow{H(\eta_A)} & H(G(A)) \\ {\scriptstyle \mu_{F(A)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_{G(A)}} \\ K(F(A)) & \xrightarrow[K(\eta_A)]{} & K(G(A)) \end{array}$$

Οι δύο μετασχηματισμοί έχουν λοιπόν τις ίδιες συνιστώσες σε κάθε A, άρα $\mu * \eta = (\mu G) \circ (H\eta) = (K\eta) \circ (\mu F)$. □

iii. Για $\eta = \mathrm{id}_F$ και $\mu = \mathrm{id}_H$ έχουμε $K = H$ και $G = F$, και η $\mathrm{id}_H * \mathrm{id}_F$ είναι μετασχηματισμός $H \circ F \Rightarrow H \circ F$. Οι συνιστώσες της είναι

$$\begin{aligned} (\mathrm{id}_H * \mathrm{id}_F)_A &= (\mathrm{id}_H)_{F(A)} \circ H\big((\mathrm{id}_F)_A\big) \\ &= \mathrm{id}_{H(F(A))} \circ H\big(\mathrm{id}_{F(A)}\big) = \mathrm{id}_{H(F(A))}, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει επειδή ο H διατηρεί τους ταυτοτικούς μορφισμούς. Οι συνιστώσες της $\mathrm{id}_{H\circ F}$ είναι οι $\mathrm{id}_{HF(A)}$, άρα $\mathrm{id}_H * \mathrm{id}_F = \mathrm{id}_{H\circ F}$. □

6.9 - Φυσικοί μετασχηματισμοί του ταυτοτικού συναρτητή στα σύνολα

i. Για κάθε $f : A \to B$ η συνθήκη φυσικότητας γράφεται

$$\eta_B \circ f = f \circ \eta_A.$$

Οι συνιστώσες δεν είναι ανεξάρτητες. Η η_B δεσμεύεται από την η_A μέσω κάθε συνάρτησης f που καταλήγει στο B.

ii. Η μόνη συνάρτηση $\mathbf{1} \to \mathbf{1}$ είναι η ταυτοτική, άρα $\eta_{\mathbf{1}}(*) = *$.

iii. Εφαρμόζουμε τη φυσικότητα στη συνάρτηση $f : \mathbf{1} \to B$ με $f(*) = b$. Η σχέση $\eta_B \circ f = f \circ \eta_{\mathbf{1}}$, υπολογισμένη στο $*$, δίνει

$$\eta_B(b) = \eta_B(f(*)) = f(\eta_{\mathbf{1}}(*)) = f(*) = b.$$

iv. Το $b \in B$ και το σύνολο B ήταν τυχαία, άρα $\eta_B = \mathrm{id}_B$ για κάθε μη κενό σύνολο B. Για το κενό σύνολο η $\eta_\varnothing : \varnothing \to \varnothing$ είναι η κενή συνάρτηση, η μοναδική συνάρτηση $\varnothing \to \varnothing$, και ταυτίζεται με την $\mathrm{id}_\varnothing$. Συνεπώς $\eta = \mathrm{id}$, και ο μόνος φυσικός μετασχηματισμός $\mathrm{Id}_{\mathbf{Set}} \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathbf{Set}}$ είναι η ταυτότητα. □

6.10 - Η κατηγορία συναρτητών

i. Αντικείμενα της $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ είναι οι συναρτητές $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, και μορφισμοί $F \to G$ οι φυσικοί μετασχηματισμοί $\eta : F \Rightarrow G$, με σύνθεση την κατακόρυφη σύνθεση της Άσκησης 6.3.

ii. Η ταυτοτική του F ορίζεται κατά συνιστώσες,

$$(\mathrm{id}_F)_A := \mathrm{id}_{F(A)} : F(A) \to F(A).$$

Είναι φυσικός μετασχηματισμός, αφού $F(f) \circ \mathrm{id}_{F(A)} = \mathrm{id}_{F(B)} \circ F(f)$. Δρα ουδέτερα στην κατακόρυφη σύνθεση, γιατί για κάθε $\eta : F \Rightarrow G$ και κάθε A

$$(\eta \circ \mathrm{id}_F)_A = \eta_A \circ \mathrm{id}_{F(A)} = \eta_A = \mathrm{id}_{G(A)} \circ \eta_A = (\mathrm{id}_G \circ \eta)_A.$$

iii. Ο Δ_T είναι συναρτητής, αφού $\Delta_T(g \circ f) = \mathrm{id}_T = \mathrm{id}_T \circ \mathrm{id}_T = \Delta_T(g) \circ \Delta_T(f)$ και $\Delta_T(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_T$. Έστω $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ τυχαίος συναρτητής. Για κάθε A ορίζουμε $\eta_A : F(A) \to T$ το μοναδικό βέλος προς το τελικό αντικείμενο.

Φυσικότητα. Για $f : A \to B$, τα δύο μονοπάτια του τετραγώνου, $\Delta_T(f) \circ \eta_A = \mathrm{id}_T \circ \eta_A$ και $\eta_B \circ F(f)$, είναι μορφισμοί $F(A) \to T$. Το T είναι τελικό, άρα υπάρχει ακριβώς ένας τέτοιος μορφισμός, και τα δύο μονοπάτια ταυτίζονται.

Μοναδικότητα. Κάθε φυσικός μετασχηματισμός $F \Rightarrow \Delta_T$ έχει συνιστώσες $F(A) \to T$, οι οποίες είναι μοναδικές. Άρα υπάρχει ακριβώς ένας μετασχηματισμός $F \Rightarrow \Delta_T$, και ο Δ_T είναι τελικό αντικείμενο στην $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$. □