

Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 5

Άσκηση 5.1 — Συναρτητές και ισομορφισμοί

Έστω $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ συναρτητής και $A \cong B$ στην $\mathcal{C}$. Τότε υπάρχει ισομορφισμός $f: A \rightarrow B$ με αντίστροφο $g: B \rightarrow A$, δηλαδή

$$g \circ f = \text{id}_A, \quad f \circ g = \text{id}_B.$$

Εφαρμόζοντας τον F παίρνουμε

$$F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)},$$

$$F(f) \circ F(g) = F(f \circ g) = F(\text{id}_B) = \text{id}_{F(B)}.$$

Άρα ο $F(f): F(A) \rightarrow F(B)$ είναι ισομορφισμός με αντίστροφο τον $F(g)$, δηλαδή $F(A) \cong F(B)$. Ο F μεταφέρει ολόκληρο το ζεύγος των βελών, μαζί με τις δύο ταυτοτικές που δίνουν οι συνθέσεις τους. $\square$

$$\begin{array}{ccc} A & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} & B \\ & \xrightarrow{F} & \\ F(A) & \begin{array}{c} \xrightarrow{F(f)} \\ \xleftarrow{F(g)} \end{array} & F(B) \end{array}$$

Άσκηση 5.2 — Ο επιλήσμων συναρτητής $U: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$

- i. Σε κάθε ομάδα $(G, \cdot)$ ο U αντιστοιχίζει το υποκείμενο σύνολό της, $U(G, \cdot) = G$, αγνοώντας την πράξη.
- ii. Σε κάθε ομομορφισμό $\varphi: G \rightarrow H$ ο U αντιστοιχίζει την ίδια απεικόνιση $U(\varphi) = \varphi$ ως συνάρτηση μεταξύ των συνόλων $U(G)$ και $U(H)$, αγνοώντας ότι διατηρεί τη δομή ομάδας.
- iii. Για ομομορφισμούς $\varphi: G \rightarrow H$ και $\psi: H \rightarrow K$, η σύνθεση $\psi \circ \varphi$ στη $\mathbf{Grp}$ είναι η σύνθεση των απεικονίσεων, οπότε

$$U(\psi \circ \varphi) = \psi \circ \varphi = U(\psi) \circ U(\varphi).$$

- iv. Ο ταυτοτικός ομομορφισμός της G είναι η ταυτοτική απεικόνιση του υποκείμενου συνόλου, άρα $U(\text{id}_G) = \text{id}_G = \text{id}_{U(G)}$.

Ο U ικανοποιεί και τους δύο νόμους, άρα είναι συναρτητής. $\square$

Άσκηση 5.3 — Ο επιλήσμων $U_1 : \mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Ab}$

- i. Στα αντικείμενα έχουμε $U_1(R, +, \cdot) = (R, +)$ και στους μορφισμούς $U_1(\varphi) = \varphi$, αφού κάθε ομομορφισμός δακτυλίων διατηρεί την πρόσθεση, άρα είναι ομομορφισμός των υποκείμενων αβελιανών ομάδων. Η σύνθεση διατηρείται, αφού $U_1(\psi \circ \varphi) = \psi \circ \varphi = U_1(\psi) \circ U_1(\varphi)$, και οι ταυτοτικοί επίσης, αφού $U_1(\text{id}_R) = \text{id}_{(R,+)}$. Άρα ο U_1 είναι συναρτητής. $\square$
- ii. Ο U_1 ξεχνά τον πολλαπλασιασμό. Για παράδειγμα, στον $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ υπάρχουν μηδενοδιαίρετες $([2] \cdot [3] = [0])$, πληροφορία που αφορά αποκλειστικά την πολλαπλασιαστική δομή. Η δομή της αβελιανής ομάδας $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ δεν περιέχει αυτή την πληροφορία. Γενικότερα, δύο δακτύλιοι με το ίδιο $(R, +)$ αλλά διαφορετικό πολλαπλασιασμό απεικονίζονται στο ίδιο αντικείμενο της $\mathbf{Ab}$.
- iii. Ο U_1 είναι πιστός, διότι αν $U_1(\varphi_1) = U_1(\varphi_2)$, οι φ_1, φ_2 ταυτίζονται ως απεικονίσεις, άρα $\varphi_1 = \varphi_2$. Δεν είναι πλήρης, διότι υπάρχουν ομομορφισμοί αβελιανών ομάδων $(R, +) \rightarrow (S, +)$ που δεν διατηρούν τον πολλαπλασιασμό. Για παράδειγμα, η $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ με $\varphi(n) = 2n$ είναι ομομορφισμός ομάδων αλλά όχι ομομορφισμός δακτυλίων, αφού $\varphi(1 \cdot 1) = 2 \neq 4 = \varphi(1)\varphi(1)$.

Άσκηση 5.4 — Ο συναρτητής δυναμοσυνόλου

- i. Ελέγχουμε ότι ο $\mathcal{P}$ είναι συναλλοίωτος συναρτητής.
 - Στα αντικείμενα, $\mathcal{P}(A)$ είναι το δυναμοσύνολο του A .
 - Στους μορφισμούς, για $f : A \rightarrow B$ η $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$ δίνεται από $\mathcal{P}(f)(S) = f(S) = \{f(s) \mid s \in S\}$.
 - Για τη σύνθεση έχουμε $\mathcal{P}(g \circ f)(S) = (g \circ f)(S) = g(f(S)) = \mathcal{P}(g)(\mathcal{P}(f)(S))$, άρα $\mathcal{P}(g \circ f) = \mathcal{P}(g) \circ \mathcal{P}(f)$.
 - Για τους ταυτοτικούς έχουμε $\mathcal{P}(\text{id}_A)(S) = \text{id}_A(S) = S = \text{id}_{\mathcal{P}(A)}(S)$.
- ii. Ο ανταλλοίωτος $\mathcal{P}^*$ ορίζεται στα αντικείμενα με $\mathcal{P}^*(A) = \mathcal{P}(A)$ και, για $f : A \rightarrow B$, στους μορφισμούς με την αντίστροφη εικόνα

$$\mathcal{P}^*(f) : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A), \quad \mathcal{P}^*(f)(T) = f^{-1}(T) = \{a \in A \mid f(a) \in T\}.$$

Για τη σύνθεση, έστω $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ και $T \subseteq C$. Τότε

$$\mathcal{P}^*(g \circ f)(T) = (g \circ f)^{-1}(T) = f^{-1}(g^{-1}(T)) = \mathcal{P}^*(f)(\mathcal{P}^*(g)(T)).$$

Άρα $\mathcal{P}^*(g \circ f) = \mathcal{P}^*(f) \circ \mathcal{P}^*(g)$, δηλαδή η σειρά της σύνθεσης αντιστρέφεται, όπως απαιτεί ο ανταλλοίωτος συναρτητής. Επιπλέον $\mathcal{P}^*(\text{id}_A)(T) = \text{id}_A^{-1}(T) = T$, άρα $\mathcal{P}^*(\text{id}_A) = \text{id}_{\mathcal{P}(A)}$. Στο διάγραμμα φαίνεται πώς ο $\mathcal{P}^*$ γυρίζει ανάποδα όλα τα βέλη. $\square$

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\mathcal{P}^*} \mathcal{P}(A) \xleftarrow{f^{-1}} \mathcal{P}(B) \xleftarrow{g^{-1}} \mathcal{P}(C)$$

Άσκηση 5.5 — Συναρτητές και διαγράμματα

- i. Το αντίστοιχο διάγραμμα στην $\mathcal{D}$ είναι

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C).$$

- ii. Ο μορφισμός $h = g \circ f : A \rightarrow C$ απεικονίζεται στο βέλος $F(h) : F(A) \rightarrow F(C)$, και από τον νόμο διατήρησης της σύνθεσης ισχύει

$$F(h) = F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

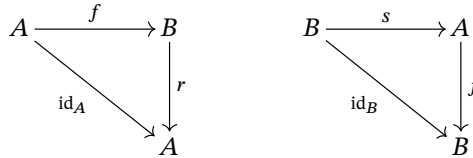
Δηλαδή το $F(h)$ είναι ακριβώς η σύνθεση των δύο βελών του διαγράμματος του (i). Στο τρίγωνο

$$\begin{array}{ccccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) & \xrightarrow{F(g)} & F(C) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & F(h) & & \end{array}$$

οι δύο διαδρομές από το $F(A)$ στο $F(C)$ δίνουν τον ίδιο μορφισμό, άρα το τρίγωνο αντιμετατίθεται. $\square$

Άσκηση 5.6 — Τομές και συστολές

Ας θυμηθούμε πρώτα τους δύο όρους¹. Η συστολή r και η τομή s του f εκφράζονται με δύο αντιμεταθετικά τρίγωνα. Στο πρώτο η διαδρομή $A \rightarrow B \rightarrow A$ είναι η id_A , στο δεύτερο η διαδρομή $B \rightarrow A \rightarrow B$ είναι η id_B .



Η λύση στηρίζεται στο ότι ο F μεταφέρει αντιμεταθετικά τρίγωνα σε αντιμεταθετικά τρίγωνα.

- i. Έστω $f : A \rightarrow B$ με αριστερό αντίστροφο r , δηλαδή $r \circ f = \text{id}_A$. Εφαρμόζοντας τον F παίρνουμε

$$F(r) \circ F(f) = F(r \circ f) = F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}.$$

Άρα ο $F(r)$ είναι συστολή, δηλαδή αριστερό αντίστροφο, του $F(f)$. □

- ii. Ναι, ισχύει. Αν $f \circ s = \text{id}_B$, τότε

$$F(f) \circ F(s) = F(f \circ s) = F(\text{id}_B) = \text{id}_{F(B)},$$

άρα ο $F(s)$ είναι τομή, δηλαδή δεξιό αντίστροφο, του $F(f)$. □

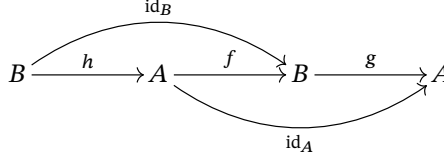
- iii. Αν ο f είναι ισομορφισμός με αντίστροφο g , τότε ο g είναι ταυτόχρονα συστολή και τομή του f . Από τα (i) και (ii), ο $F(g)$ είναι ταυτόχρονα αριστερό και δεξιό αντίστροφο του $F(f)$, δηλαδή αντίστροφός του, άρα ο $F(f)$ είναι ισομορφισμός. Το Σχόλιο της §5.2 για τη διατήρηση ισομορφισμών προκύπτει έτσι ως ειδική περίπτωση. Οι συναρτητές διατηρούν τις τομές και τις συστολές, οπότε διατηρούν και τους ισομορφισμούς.

Άσκηση 5.7 — Ισομορφισμός από αριστερό και δεξιό αντίστροφο

- i. Έχουμε $g \circ f = \text{id}_A$ και $f \circ h = \text{id}_B$, δηλαδή ο g είναι συστολή και ο h τομή του f , με τους όρους της Άσκησης 5.6. Το μονοπάτι $B \xrightarrow{h} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A$ συντομεύεται

¹Ένας μορφισμός $f : A \rightarrow B$ έχει συστολή (retraction), ή αριστερό αντίστροφο, αν υπάρχει $r : B \rightarrow A$ με $r \circ f = \text{id}_A$. Έχει τομή (section), ή δεξιό αντίστροφο, αν υπάρχει $s : B \rightarrow A$ με $f \circ s = \text{id}_B$. Οι ορισμοί δίνονται στην εκφώνηση της Άσκησης 5.6 του βιβλίου.

με δύο τρόπους. Αν αντικαταστήσουμε τα δύο πρώτα βέλη με την id_B , μένει ο g . Αν αντικαταστήσουμε τα δύο τελευταία με την id_A , μένει ο h .



Με πράξεις αυτό γράφεται

$$g = g \circ \text{id}_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \text{id}_A \circ h = h.$$

Άρα $g = h$, οπότε $f \circ g = f \circ h = \text{id}_B$ και $g \circ f = \text{id}_A$. Ο f είναι ισομορφισμός. $\square$

ii. Από το (i), ο f είναι ισομορφισμός. Από το Σχόλιο της §5.2 για τη διατήρηση ισομορφισμών, ο $F(f)$ είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{D}$. $\square$

iii. Θεωρούμε τον επιλήσμονα $U : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ και τη συνεχή

$$f : [0, 2\pi) \rightarrow S^1, \quad f(t) = (\cos t, \sin t),$$

που γνωρίσαμε στο Κεφάλαιο 1. Η f δεν είναι ισομορφισμός στην $\mathbf{Top}$, αφού η αντίστροφή της δεν είναι συνεχής. Όμως η $U(f)$ είναι αμφίρριψη, άρα ισομορφισμός στη $\mathbf{Set}$.

Συμπεραίνουμε ότι η αντίστροφή κατεύθυνση δεν ισχύει. Το ότι ο $F(f)$ είναι ισομορφισμός δεν συνεπάγεται ότι ο f είναι ισομορφισμός, δηλαδή ένας συναρτητής δεν αντικατοπτρίζει κατ' ανάγκην τους ισομορφισμούς.

Άσκηση 5.8 — Σύνθεση επιλήσμονα και δυναμοσυνόλου

i. Ο $\mathcal{P} \circ U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ δρα ως εξής.

- Σε κάθε ομάδα G αντιστοιχίζει το σύνολο $(\mathcal{P} \circ U)(G) = \mathcal{P}(U(G))$, το δυναμοσύνολο του υποκείμενου συνόλου της ομάδας.
- Σε κάθε ομομορφισμό $\varphi : G \rightarrow H$ αντιστοιχίζει την απεικόνιση που στέλνει κάθε $S \subseteq G$ στην εικόνα του, $(\mathcal{P} \circ U)(\varphi)(S) = \varphi(S) = \{\varphi(s) \mid s \in S\}$.

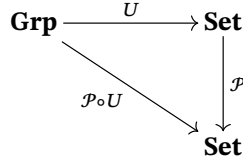
ii. Επαληθεύουμε τους δύο νόμους απευθείας. Για τη σύνθεση,

$$(\mathcal{P} \circ U)(\psi \circ \varphi) = \mathcal{P}(U(\psi \circ \varphi)) = \mathcal{P}(U(\psi) \circ U(\varphi)) = \mathcal{P}(U(\psi)) \circ \mathcal{P}(U(\varphi)),$$

όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι ο U διατηρεί τη σύνθεση και στην τρίτη ότι ο $\mathcal{P}$ τη διατηρεί. Για τους ταυτοτικούς,

$$(\mathcal{P} \circ U)(\text{id}_G) = \mathcal{P}(\text{id}_{U(G)}) = \text{id}_{\mathcal{P}(U(G))}.$$

Άρα ο $\mathcal{P} \circ U$ είναι συναρτητής. Το ίδιο επιχείρημα δείχνει γενικά ότι η σύνθεση δύο συναρτητών είναι συναρτητής. Στο επίπεδο των κατηγοριών η σύνθεση είναι πάλι ένα τρίγωνο, αυτή τη φορά στην **Cat**. $\square$



iii. Για $G = (\mathbb{Z}, +)$ έχουμε $(\mathcal{P} \circ U)(G) = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, το δυναμοσύνολο των ακεραίων (υπεραριθμήσιμο σύνολο), και $(\mathcal{P} \circ U)(\text{id}_G) = \text{id}_{\mathcal{P}(\mathbb{Z})}$.

Άσκηση 5.9 — Υπολογισμός σύνθετου συναρτητή

i. Έχουμε $(\mathcal{P} \circ U)(\mathbb{Z}) = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, το δυναμοσύνολο των ακεραίων, που είναι άπειρο (υπεραριθμήσιμο) σύνολο. Επίσης

$$(\mathcal{P} \circ U)(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathcal{P}(\{[0], [1]\}) = \{\emptyset, \{[0]\}, \{[1]\}, \{[0], [1]\}\},$$

σύνολο 4 στοιχείων. Και τα δύο είναι απλώς σύνολα, χωρίς καμία αλγεβρική δομή.

ii. Για $S = \{0, 2, 4\}$ έχουμε

$$(\mathcal{P} \circ U)(\varphi)(S) = \varphi(S) = \{[0]_2, [2]_2, [4]_2\} = \{[0]\}.$$

Για $S = \{1, 3\}$ έχουμε

$$(\mathcal{P} \circ U)(\varphi)(S) = \{[1]_2, [3]_2\} = \{[1]\}.$$

- iii. Έχουμε $(\mathcal{P} \circ U)(\varphi)(\mathbb{Z}) = \varphi(\mathbb{Z}) = \{[0], [1]\}$. Η εικόνα ολόκληρου του $\mathbb{Z}$ είναι ολόκληρο το $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, όπως αναμένεται αφού ο φ είναι επίρριψη.

Άσκηση 5.10 — Ο σταθερός συναρτητής

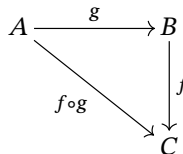
- i. Ο F είναι συναρτητής, αφού
- για τη σύνθεση ισχύει $F(\psi \circ \varphi) = \text{id}_{\{*\}} = \text{id}_{\{*\}} \circ \text{id}_{\{*\}} = F(\psi) \circ F(\varphi)$,
 - για τους ταυτοτικούς ισχύει $F(\text{id}_G) = \text{id}_{\{*\}} = \text{id}_{F(G)}$.
- ii. Ο F είναι πλήρης. Το $\mathbf{Set}(\{*\}, \{*\})$ έχει ένα μόνο στοιχείο, την $\text{id}_{\{*\}}$. Για κάθε ζεύγος ομάδων G, H , το $\mathbf{Grp}(G, H)$ είναι μη κενό (περιέχει τουλάχιστον τον τετριμμένο ομομορφισμό), και η εικόνα του μέσω του F είναι η $\text{id}_{\{*\}}$. Άρα η αντιστοιχία $\mathbf{Grp}(G, H) \rightarrow \mathbf{Set}(\{*\}, \{*\})$ είναι επίρριψη.
- Δεν είναι όμως πιστός. Όποτε το $\mathbf{Grp}(G, H)$ έχει περισσότερους από έναν ομομορφισμούς (π.χ. οι δύο ομομορφισμοί $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$), όλοι απεικονίζονται στην ίδια $\text{id}_{\{*\}}$, άρα η αντιστοιχία δεν είναι έρριψη.
- iii. Και τα δύο είναι αναμενόμενα από τη μορφή του F . Όλα τα αντικείμενα πηγαίνουν στο ίδιο $\{*\}$, οπότε κάθε Hom -σύνολο στόχου είναι το μονοσύνολο $\mathbf{Set}(\{*\}, \{*\})$ και η επιρριπτικότητα (πληρότητα) είναι αυτόματη, αφού δεν υπάρχει τίποτα στον στόχο που να μένει ακάλυπτο. Για τον ίδιο λόγο χάνεται η πιστότητα. Ο F συμπύσσει όλους τους μορφισμούς σε έναν και δεν μπορεί να διακρίνει διαφορετικούς ομομορφισμούς.

Άσκηση 5.11 — Ο συναλλοίωτος Hom -συναρτητής

- i. Σε κάθε αντικείμενο B αντιστοιχίζει το σύνολο $h^A(B) = \mathcal{C}(A, B)$.
- ii. Σε κάθε μορφισμό $f : B \rightarrow C$ αντιστοιχίζει την απεικόνιση

$$h^A(f) : \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{C}(A, C), \quad h^A(f)(g) = f \circ g.$$

Ο $h^A(f)$ παίρνει ένα βέλος g από το A στο B και το «προεκτείνει» με τον f , κλείνοντας το τρίγωνο.



iii. Για τη σύνθεση, έστω $f : B \rightarrow C$ και $k : C \rightarrow D$. Τότε

$$h^A(k \circ f)(g) = (k \circ f) \circ g = k \circ (f \circ g) = h^A(k)(h^A(f)(g)),$$

άρα $h^A(k \circ f) = h^A(k) \circ h^A(f)$, όπου χρησιμοποιήθηκε η προσεταιριστικότητα. Για τους ταυτοτικούς, $h^A(\text{id}_B)(g) = \text{id}_B \circ g = g$, άρα $h^A(\text{id}_B) = \text{id}_{\mathcal{C}(A,B)}$. $\square$

Άσκηση 5.12 — Ο ανταλλοίωτος $\text{Hom}(-, W)$

i. Αν $f : V \rightarrow V'$, τότε για κάθε $\varphi \in \text{Hom}(V', W)$ η σύνθεση $\varphi \circ f$ ανήκει στο $\text{Hom}(V, W)$. Άρα $f^* : \text{Hom}(V', W) \rightarrow \text{Hom}(V, W)$, δηλαδή η φορά αντιστρέφεται.

ii. Για $f : V \rightarrow V'$ και $g : V' \rightarrow V''$ έχουμε

$$(g \circ f)^*(\varphi) = \varphi \circ (g \circ f) = (\varphi \circ g) \circ f = f^*(g^*(\varphi)) = (f^* \circ g^*)(\varphi).$$

Άρα $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, δηλαδή η σειρά της σύνθεσης αντιστρέφεται. $\square$

iii. Κάθε f^* είναι γραμμική, αφού $f^*(a\varphi + b\psi) = (a\varphi + b\psi) \circ f = a f^*(\varphi) + b f^*(\psi)$, άρα είναι μορφισμός της $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$. Η αντιστοιχία αντιστρέφει τη φορά των βελών (i) και τη σειρά της σύνθεσης (ii), ενώ $(\text{id}_V)^*(\varphi) = \varphi \circ \text{id}_V = \varphi$ δίνει $(\text{id}_V)^* = \text{id}_{\text{Hom}(V, W)}$. Ο $\text{Hom}(-, W)$ είναι λοιπόν ανταλλοίωτος συναρτητής.

iv. Για $W = \mathbb{F}$, ο $\text{Hom}(V, \mathbb{F})$ είναι ο δυϊκός χώρος V^* , δηλαδή ο χώρος των γραμμικών συναρτησοειδών στο V , γνωστός από τη Γραμμική Άλγεβρα. Η f^* είναι τότε η ανάστροφη απεικόνιση και ο $\text{Hom}(-, \mathbb{F})$ είναι ο συναρτητής $(-)^*$ του Παραδείγματος 5.5.

Άσκηση 5.13 — Ο ανταλλοίωτος h_C

i. Για $f : A \rightarrow B$ στην $\mathcal{C}$ και $g \in \mathcal{C}(B, C)$, η σύνθεση $g \circ f$ ανήκει στο $\mathcal{C}(A, C)$, άρα η

$$f^* : \mathcal{C}(B, C) \rightarrow \mathcal{C}(A, C), \quad f^*(g) = g \circ f$$

είναι καλά ορισμένη και αντιστρέφει τη φορά. Για τη σύνθεση, έστω $f : A \rightarrow B$, $k : B \rightarrow D$ και $g \in \mathcal{C}(D, C)$. Τότε

$$(k \circ f)^*(g) = g \circ (k \circ f) = (g \circ k) \circ f = f^*(k^*(g)),$$

άρα $(k \circ f)^* = f^* \circ k^*$, δηλαδή η σειρά αντιστρέφεται. Για τους ταυτοτικούς, $(\text{id}_A)^*(g) = g \circ \text{id}_A = g$. Ο h_C είναι ανταλλοίωτος συναρτητής. $\square$

- ii. Για $C = \{0, 1\}$ στη **Set**, το $h_C(A) = \mathbf{Set}(A, \{0, 1\})$ βρίσκεται σε αμφίρριψη με το σύνολο των υποσυνόλων του A . Κάθε $f : A \rightarrow \{0, 1\}$ αντιστοιχεί στο υποσύνολο $f^{-1}(\{1\}) \subseteq A$, του οποίου είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση.
- iii. Αν $|A| = n$, τότε $|h_C(A)| = 2^n$, ένα στοιχείο για κάθε υποσύνολο του A .

Άσκηση 5.14 — Ανταλλοίωτοι και αντίθετη κατηγορία

- i. Ορίζουμε $\tilde{F} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ με $\tilde{F}(A) = F(A)$ στα αντικείμενα και, για $f^{\text{op}} : B \rightarrow A$ στην $\mathcal{C}^{\text{op}}$ (δηλαδή $f : A \rightarrow B$ στην $\mathcal{C}$),

$$\tilde{F}(f^{\text{op}}) = F(f) : F(B) \rightarrow F(A),$$

όπου η φορά $F(B) \rightarrow F(A)$ είναι αυτή που δίνει ο ανταλλοίωτος F . Οι πηγές και οι στόχοι συμφωνούν, αφού $f^{\text{op}} : B \rightarrow A$ και $\tilde{F}(f^{\text{op}}) : \tilde{F}(B) \rightarrow \tilde{F}(A)$.

Για τη σύνθεση, έστω $f : A \rightarrow B$ και $g : B \rightarrow D$ στην $\mathcal{C}$. Ισχύει $f^{\text{op}} \circ^{\text{op}} g^{\text{op}} = (g \circ f)^{\text{op}}$ στην $\mathcal{C}^{\text{op}}$, οπότε

$$\tilde{F}(f^{\text{op}} \circ^{\text{op}} g^{\text{op}}) = \tilde{F}((g \circ f)^{\text{op}}) = F(g \circ f) = F(f) \circ F(g) = \tilde{F}(f^{\text{op}}) \circ \tilde{F}(g^{\text{op}}),$$

όπου η τρίτη ισότητα είναι ο νόμος αντιστροφής του ανταλλοίωτου F . Για τους ταυτοτικούς, $\tilde{F}(\text{id}_A^{\text{op}}) = F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$. Ο $\tilde{F}$ είναι συναλλοίωτος συναρτητής. $\square$

- ii. Αντίστροφα, από συναλλοίωτο $G : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ ορίζουμε $\hat{G} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ με $\hat{G}(A) = G(A)$ και $\hat{G}(f) = G(f^{\text{op}})$. Για $f : A \rightarrow B$ έχουμε $\hat{G}(f) : G(B) \rightarrow G(A)$, και

$$\hat{G}(g \circ f) = G((g \circ f)^{\text{op}}) = G(f^{\text{op}} \circ^{\text{op}} g^{\text{op}}) = G(f^{\text{op}}) \circ G(g^{\text{op}}) = \hat{G}(f) \circ \hat{G}(g).$$

Επιπλέον $\hat{G}(\text{id}_A) = G(\text{id}_A^{\text{op}}) = \text{id}_{G(A)}$. Η σειρά της σύνθεσης αντιστρέφεται, άρα ο $\hat{G}$ είναι ανταλλοίωτος. $\square$

- iii. Εφαρμόζοντας την κατασκευή του (i) στον $\text{Hom}(-, W)$ παίρνουμε την αντιστοιχία $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$ με $V \mapsto \text{Hom}(V, W)$ και $f^{\text{op}} \mapsto f^*$. Για $f : V \rightarrow V'$, ο $f^{\text{op}} : V' \rightarrow V$ απεικονίζεται στην $f^* : \text{Hom}(V', W) \rightarrow \text{Hom}(V, W)$, οπότε η φορά διατηρείται. Για $g : V' \rightarrow V''$, από την Άσκηση 5.12(ii) έχουμε

$$f^{\text{op}} \circ^{\text{op}} g^{\text{op}} = (g \circ f)^{\text{op}} \mapsto (g \circ f)^* = f^* \circ g^*,$$

και $\text{id}_V^{\text{op}} \mapsto (\text{id}_V)^* = \text{id}_{\text{Hom}(V, W)}$. Άρα προκύπτει συναλλοίωτος συναρτητής $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$.

Άσκηση 5.15 — Σύνθεση και διακύμανση

Σε όλη την άσκηση η σύνθεση $G \circ F$ ορίζεται όπως στην §5.6, δηλαδή $(G \circ F)(A) = G(F(A))$ και $(G \circ F)(f) = G(F(f))$.

- i. Έστω ότι οι F και G είναι ανταλλοίωτοι και $f : A \rightarrow B$. Τότε $F(f) : F(B) \rightarrow F(A)$, άρα $G(F(f)) : G(F(B)) \rightarrow G(F(A))$, δηλαδή η φορά διατηρείται. Για $f : A \rightarrow B$ και $g : B \rightarrow C$ έχουμε

$$\begin{aligned} (G \circ F)(g \circ f) &= G(F(f) \circ F(g)) = G(F(g)) \circ G(F(f)) \\ &= (G \circ F)(g) \circ (G \circ F)(f), \end{aligned}$$

όπου εφαρμόσαμε διαδοχικά τον νόμο αντιστροφής του F και του G . Επίσης $(G \circ F)(\text{id}_A) = G(\text{id}_{F(A)}) = \text{id}_{G(F(A))}$. Άρα ο $G \circ F$ είναι συναλλοίωτος. $\square$

- ii. Ο $G \circ F$ είναι ανταλλοίωτος. Αν ο F είναι συναλλοίωτος και ο G ανταλλοίωτος, τότε $G(F(f)) : G(F(B)) \rightarrow G(F(A))$ και

$$(G \circ F)(g \circ f) = G(F(g) \circ F(f)) = G(F(f)) \circ G(F(g)).$$

Αν ο F είναι ανταλλοίωτος και ο G συναλλοίωτος, τότε πάλι

$$G(F(f)) : G(F(B)) \rightarrow G(F(A))$$

και

$$(G \circ F)(g \circ f) = G(F(f) \circ F(g)) = G(F(f)) \circ G(F(g)).$$

Και στις δύο περιπτώσεις οι ταυτοτικοί διατηρούνται όπως στο (i).

- iii. Ο γενικός κανόνας είναι ότι η σύνθεση δύο συναρτητών είναι συναλλοίωτη όταν οι δύο έχουν την ίδια διακύμανση και ανταλλοίωτη όταν έχουν διαφορετική. Επαγωγικά, μια σύνθεση πεπερασμένου πλήθους συναρτητών είναι συναλλοίωτη αν το πλήθος των ανταλλοίωτων παραγόντων είναι άρτιο και ανταλλοίωτη αν είναι περιττό.

Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε δύο μεταφράσεις. Η πρώτη είναι η κατασκευή της Άσκησης 5.14, κατά την οποία ένας ανταλλοίωτος $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ είναι ο συναλλοίωτος $\tilde{F} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ με $\tilde{F}(f^{\text{op}}) = F(f)$. Η δεύτερη είναι ότι κάθε συναλ-

λοίωτος $H: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ορίζει συναλλοίωτο $H^{\text{op}}: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$ με $H^{\text{op}}(A) = H(A)$ και $H^{\text{op}}(f^{\text{op}}) = H(f)^{\text{op}}$. Πράγματι, για $f: B \rightarrow A$ και $g: C \rightarrow B$ στην $\mathcal{C}$,

$$H^{\text{op}}(g^{\text{op}} \circ f^{\text{op}}) = H(f \circ g)^{\text{op}} = (H(f) \circ H(g))^{\text{op}} = H^{\text{op}}(g^{\text{op}}) \circ H^{\text{op}}(f^{\text{op}}),$$

και $H^{\text{op}}(\text{id}_A^{\text{op}}) = \text{id}_{H(A)}^{\text{op}}$. Τώρα εξετάζουμε τις περιπτώσεις, χρησιμοποιώντας ότι η σύνθεση συναλλοίωτων συναρτητών είναι συναλλοίωτος συναρτητής.

- Αν ο F είναι συναλλοίωτος και ο G ανταλλοίωτος, ο $\tilde{G} \circ F^{\text{op}}: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{E}$ είναι συναλλοίωτος και στέλνει το f^{op} στο $\tilde{G}(F(f)^{\text{op}}) = G(F(f))$. Από την Άσκηση 5.14(ii), ο $G \circ F$ είναι ανταλλοίωτος.
- Αν ο F είναι ανταλλοίωτος και ο G συναλλοίωτος, ο $G \circ \tilde{F}: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{E}$ είναι συναλλοίωτος και στέλνει το f^{op} στο $G(F(f))$. Άρα ο $G \circ F$ είναι ανταλλοίωτος.
- Αν και οι δύο είναι ανταλλοίωτοι, τότε $\tilde{F}: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ είναι συναλλοίωτος, άρα και ο $(\tilde{F})^{\text{op}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$, αφού $(\mathcal{C}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathcal{C}$. Ο $(\tilde{F})^{\text{op}}$ στέλνει το f στο $F(f)^{\text{op}}$, οπότε ο συναλλοίωτος $\tilde{G} \circ (\tilde{F})^{\text{op}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ στέλνει το f στο $G(F(f))$. Άρα ο $G \circ F$ είναι συναλλοίωτος, σε συμφωνία με το (i).

Κάθε ανταλλοίωτος παράγοντας προσθέτει δηλαδή ένα op, και δύο διαδοχικά op αλληλοαναιρούνται, αφού $(\mathcal{C}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathcal{C}$. Από αυτό προκύπτει επαγωγικά ο κανόνας για οσοσδήποτε παράγοντες. $\square$

Άσκηση 5.16 — Πιστότητα και πληρότητα του επιλήσμονα

- Αν $U(\varphi_1) = U(\varphi_2)$ ως συναρτήσεις, τότε $\varphi_1(g) = \varphi_2(g)$ για κάθε $g \in G$, άρα $\varphi_1 = \varphi_2$. Η αντιστοιχία $\varphi \mapsto U(\varphi)$ είναι έρριψη και ο U πιστός. $\square$
- Δεν είναι πλήρης. Ακολουθούμε την υπόδειξη. Οι ομομορφισμοί $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ καθορίζονται από την εικόνα του 1, άρα είναι ακριβώς δύο, ο τετριμμένος και η αναγωγή modulo 2. Οι συναρτήσεις όμως $U(\mathbb{Z}) \rightarrow U(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ είναι $2^{\aleph_0}$, δηλαδή υπεραριθμήσιμα πολλές. Σχεδόν καμία δεν προέρχεται από ομομορφισμό. Συγκεκριμένο αντιπαράδειγμα είναι η $f(n) = [n + 1]_2$, που δεν είναι ομομορφισμός, αφού $f(0) = [1] \neq [0]$.
- Η αντιστοιχία $U_{G,H}: \mathbf{Grp}(G, H) \rightarrow \mathbf{Set}(U(G), U(H))$ είναι λοιπόν έρριψη (πιστότητα) αλλά όχι κατ' ανάγκην επίρριψη (μη πληρότητα). Παράδειγμα επιρριπτικής συνάρτησης που δεν προέρχεται από ομομορφισμό είναι η αντιμετάθεση $[0] \leftrightarrow [1]$ στο $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Είναι αμφίρριψη, άρα επίρριψη, αλλά δεν διατηρεί το

ουδέτερο, οπότε δεν είναι εικόνα κανενός ομομορφισμού $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Επιρριπτική είναι και η f του (ii).

Άσκηση 5.17 — Ο συναρτητής $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}^{\text{fd}} \rightarrow \mathbf{Mat}_{\mathbb{F}}$

Έστω V με $\dim V = m$ και βάση $\mathcal{B}_V = (v_1, \dots, v_m)$, και W με $\dim W = n$ και βάση $\mathcal{B}_W = (w_1, \dots, w_n)$. Για γραμμική $f: V \rightarrow W$, η μήτρα $D(f) = (a_{ij})$ ορίζεται από τις σχέσεις $f(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} w_i$. Είναι $n \times m$ μήτρα, δηλαδή $D(f) \in \mathbf{Mat}_{\mathbb{F}}(m, n) = \mathbf{Mat}_{\mathbb{F}}(D(V), D(W))$, όπως απαιτεί ο ορισμός της $\mathbf{Mat}_{\mathbb{F}}$ στο Κεφάλαιο 4.

- i. Έστω $f: U \rightarrow V$ και $g: V \rightarrow W$, με $\mathcal{B}_U = (u_1, \dots, u_p)$ και $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ όπως πριν, και $A = D(f), B = D(g)$. Τότε

$$(g \circ f)(u_j) = g\left(\sum_{k=1}^m a_{kj} v_k\right) = \sum_{k=1}^m a_{kj} \sum_{i=1}^n b_{ik} w_i = \sum_{i=1}^n (BA)_{ij} w_i,$$

άρα $D(g \circ f) = BA = D(g) \circ D(f)$, αφού η σύνθεση στη $\mathbf{Mat}_{\mathbb{F}}$ είναι ο πολλαπλασιασμός μητρών. Επίσης $\text{id}_V(v_j) = v_j$, άρα $D(\text{id}_V) = I_m = \text{id}_{D(V)}$. Εδώ είναι ουσιώδες ότι για κάθε χώρο χρησιμοποιούμε την ίδια βάση $\mathcal{B}_V$ και όταν είναι πηγή και όταν είναι στόχος. Ο D είναι συναρτητής. $\square$

- ii. Πρέπει να δείξουμε ότι κάθε $D_{V,W}: \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}^{\text{fd}}(V, W) \rightarrow \mathbf{Mat}_{\mathbb{F}}(m, n)$ είναι αμφίρριψη. Αν $D(f) = D(g)$, τότε $f(v_j) = g(v_j)$ για κάθε j , και αφού μια γραμμική απεικόνιση καθορίζεται από τις τιμές της στη βάση, $f = g$. Άρα ο D είναι πιστός. Αντίστροφα, για τυχαία $n \times m$ μήτρα $A = (a_{ij})$ υπάρχει μοναδική γραμμική $f: V \rightarrow W$ με $f(v_j) = \sum_i a_{ij} w_i$, και για αυτήν $D(f) = A$. Άρα ο D είναι πλήρης, και συνεπώς πλήρως πιστός. $\square$

- iii. Όχι, δεν είναι. Διαφορετικοί χώροι της ίδιας διάστασης έχουν την ίδια εικόνα. Για παράδειγμα, ο $\mathbb{F}^2$ και ο χώρος των πολωνύμων βαθμού το πολύ 1 με συντελεστές στο $\mathbb{F}$ απεικονίζονται και οι δύο στο αντικείμενο 2. Παρατηρούμε ότι ο D ταυτίζει μόνο ισόμορφους χώρους, αφού δύο χώροι ίδιας διάστασης είναι ισόμορφοι. Σε συμφωνία με το Σχόλιο της §5.3.1 για τους πλήρως πιστούς συναρτητές, ισχύει $V \cong W$ αν και μόνο αν $D(V) \cong D(W)$, δηλαδή αν και μόνο αν $\dim V = \dim W$. Επιπλέον κάθε n είναι εικόνα, αφού $D(\mathbb{F}^n) = n$. Στο Κεφάλαιο 7 θα δούμε ότι αυτά εξασφαλίζουν ισοδυναμία κατηγοριών $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}^{\text{fd}} \simeq \mathbf{Mat}_{\mathbb{F}}$, παρότι ο D δεν είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 5.18 — Η κατηγορία **Cat**

- i. Δύο κατηγορίες $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ είναι ισομορφικές στην **Cat** αν υπάρχουν συναρτητές $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ και $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ με $G \circ F = \text{Id}_{\mathcal{C}}$ και $F \circ G = \text{Id}_{\mathcal{D}}$, όπου οι ισότητες είναι ισότητες συναρτητών. Ισοδύναμα, ο F είναι αμφίρριψη στα αντικείμενα και κάθε $F_{A,B}$ είναι αμφίρριψη.
- ii. Ένα απλό παράδειγμα είναι η διακριτή κατηγορία με αντικείμενα $\{1, 2\}$ και η διακριτή κατηγορία με αντικείμενα $\{a, b\}$, που είναι ισομορφικές μέσω του F με $F(1) = a, F(2) = b$ και του αντιστρόφου του.

Πιο ενδιαφέρον είναι το παράδειγμα της υπόδειξης. Έστω G μη αβελιανή ομάδα, ως κατηγορία με ένα αντικείμενο $*$, όπου $g \circ h = gh$. Στην G^{op} ισχύει $g^{\text{op}} \circ^{\text{op}} h^{\text{op}} = (h \circ g)^{\text{op}} = (hg)^{\text{op}}$. Αφού υπάρχουν g, h με $gh \neq hg$, οι δύο κατηγορίες έχουν διαφορετική σύνθεση και δεν ταυτίζονται. Ορίζουμε $\Phi: G \rightarrow G^{\text{op}}$ με $\Phi(*) = *$ και $\Phi(g) = (g^{-1})^{\text{op}}$. Τότε

$$\Phi(g \circ h) = ((gh)^{-1})^{\text{op}} = (h^{-1}g^{-1})^{\text{op}} = (g^{-1})^{\text{op}} \circ^{\text{op}} (h^{-1})^{\text{op}} = \Phi(g) \circ^{\text{op}} \Phi(h),$$

και $\Phi(e) = e^{\text{op}} = \text{id}_*$. Ο συναρτητής $\Psi: G^{\text{op}} \rightarrow G$ με $\Psi(g^{\text{op}}) = g^{-1}$ ελέγχεται με τον ίδιο τρόπο, και ισχύει $\Psi \circ \Phi = \text{Id}_G, \Phi \circ \Psi = \text{Id}_{G^{\text{op}}}$. Άρα $G \cong G^{\text{op}}$ στην **Cat**.

Άσκηση 5.19 — Ο συναρτητής αβελιανοποίησης

- i. Στα αντικείμενα, $G^{\text{ab}} = G/[G, G]$, που είναι αβελιανή ομάδα, αφού $[x][y][x]^{-1}[y]^{-1} = [xyx^{-1}y^{-1}] = [e]$. Στους μορφισμούς, για $\varphi: G \rightarrow H$ ορίζουμε $\varphi^{\text{ab}}: G^{\text{ab}} \rightarrow H^{\text{ab}}$ με $\varphi^{\text{ab}}([g]) = [\varphi(g)]$.

Ας δείξουμε πρώτα ότι η φ^{ab} είναι καλά ορισμένη. Ο φ απεικονίζει κάθε αντιμεταθέτη $[g_1, g_2] = g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}$ στον αντιμεταθέτη $[\varphi(g_1), \varphi(g_2)]^2$, άρα $\varphi([G, G]) \subseteq [H, H]$. Αν $g_1 \equiv g_2 \pmod{[G, G]}$, τότε $\varphi(g_1) \equiv \varphi(g_2) \pmod{[H, H]}$. Η φ^{ab} είναι ομομορφισμός, αφού $\varphi^{\text{ab}}([g][g']) = [\varphi(gg')] = [\varphi(g)][\varphi(g')]$.

Η σύνθεση διατηρείται, αφού $(\psi \circ \varphi)^{\text{ab}}([g]) = [\psi(\varphi(g))] = \psi^{\text{ab}}(\varphi^{\text{ab}}([g]))$, και οι ταυτοτικοί επίσης, αφού $(\text{id}_G)^{\text{ab}}([g]) = [g] = \text{id}_{G^{\text{ab}}}([g])$.

Ο $(-)^{\text{ab}}$ είναι συναρτητής. □

²Στο βιβλίο το στοιχείο $[g_1, g_2]$ ονομάζεται «μεταθέτης». Εδώ προτιμούμε τον όρο «αντιμεταθέτης», όπως και στις σημειώσεις του ιστότοπου. Ο όρος θυμίζει τον ρόλο του στοιχείου, αφού $[g_1, g_2] = e$ ακριβώς όταν τα g_1, g_2 αντιμετατίθενται.

- ii. Σε κάθε ομομορφισμό $\varphi : G \rightarrow H$ αντιστοιχεί ο επαγόμενος ομομορφισμός φ^{ab} μεταξύ των αβελιανοποιήσεων, που δρα στις κλάσεις με $[g] \mapsto [\varphi(g)]$.
- iii. Έστω $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ και $H = Q_8$. Η G είναι αβελιανή, άρα $[G, G] = \{e\}$ και $G^{\text{ab}} \cong G$, ομάδα 4 στοιχείων. Αφού $Q_8^{\text{ab}} \cong G$, υπάρχει ισομορφισμός $\theta : G^{\text{ab}} \rightarrow Q_8^{\text{ab}}$, του οποίου η εικόνα έχει 4 στοιχεία.

Έστω τώρα τυχαίος ομομορφισμός $\psi : G \rightarrow Q_8$. Κάθε στοιχείο της G έχει τάξη 1 ή 2, άρα και η εικόνα του έχει τάξη 1 ή 2. Το μόνο στοιχείο τάξης 2 της Q_8 είναι το -1 , οπότε $\psi(G) \subseteq \{1, -1\}$. Επομένως $\psi^{\text{ab}}([g]) = [\psi(g)] \in \{[1], [-1]\}$, δηλαδή η εικόνα της ψ^{ab} έχει το πολύ δύο στοιχεία. Μάλιστα ισχύει $-1 = i j i^{-1} j^{-1} \in [Q_8, Q_8]$, οπότε $[-1] = [1]$ και η ψ^{ab} είναι τετριμμένη. Άρα $\psi^{\text{ab}} \neq \theta$ για κάθε ψ , και η απεικόνιση

$$\mathbf{Grp}(G, Q_8) \rightarrow \mathbf{Ab}(G^{\text{ab}}, Q_8^{\text{ab}}), \quad \psi \mapsto \psi^{\text{ab}}$$

δεν είναι επίρριψη. Ο $(-)^{\text{ab}}$ δεν είναι πλήρης. □

Άσκηση 5.20 — Συναρτητές ως μεταφραστές διαγραμμάτων

- i. Το διάγραμμα εικόνας είναι

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ F(h) \downarrow & & \downarrow F(g) \\ F(C) & \xrightarrow{F(k)} & F(D) \end{array}$$

- ii. Αν $g \circ f = k \circ h$, τότε

$$F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(k \circ h) = F(k) \circ F(h).$$

Το διάγραμμα εικόνας αντιμετατίθεται. □

- iii. Θεωρούμε στη **Grp** το τετράγωνο

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z} \\ h \downarrow & & \downarrow g \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xrightarrow{k} & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \end{array}$$

με $f(n) = 2n$, $g(n) = [n]_4$, $h(n) = [n]_2$ και $k([n]_2) = [2n]_4$. Ο k είναι καλά ορισμένος, αφού αν $n \equiv n' \pmod{2}$, τότε $2n \equiv 2n' \pmod{4}$. Το τετράγωνο αντιμετωπίζεται, αφού $g(f(n)) = [2n]_4 = k(h(n))$. Εφαρμόζοντας τον U , το ίδιο τετράγωνο, θεωρημένο με συναρτήσεις μεταξύ των υποκείμενων συνόλων, εξακολουθεί να αντιμετωπίζεται.

- iv. Οι συναρτητές διατηρούν την αντιμεταθετικότητα διαγραμμάτων. Αυτή η ιδιότητα τους καθιστά δομικές απεικονίσεις μεταξύ κατηγοριών, αφού μεταφράζουν ολόκληρα διαγράμματα και όχι μεμονωμένα βέλη. Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά, όμως αν ο F είναι πιστός, από την ισότητα $F(g \circ f) = F(k \circ h)$ έπεται $g \circ f = k \circ h$.

Άσκηση 5.21 — Ο συναρτητής θεμελιώδους ομάδας

- i. Ο π_1 είναι συναρτητής $\mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$. Αν $(X, x_0) \cong (Y, y_0)$ στην $\mathbf{Top}_*$, τότε από την Άσκηση 5.1, αφού οι συναρτητές διατηρούν τους ισομορφισμούς,

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$$

στην $\mathbf{Grp}$. □

- ii. Όχι, η αντίστροφη δεν ισχύει. Ακολουθώντας την υπόδειξη, οι $(S^1, 1)$ και $(S^1 \times \mathbb{R}, (1, 0))$ έχουν και οι δύο $\pi_1 \cong \mathbb{Z}$. Ένας ισομορφισμός στη $\mathbf{Top}_*$ θα ήταν ομοιομορφισμός $S^1 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$, όμως οι χώροι δεν είναι ομοιομορφικοί, αφού ο S^1 είναι συμπαγής ενώ ο $S^1 \times \mathbb{R}$ όχι, και η συμπαγεία διατηρείται από ομοιομορφισμούς.
- iii. Το ερώτημα (i), με αντιθετοαντιστροφή, δίνει ότι αν $\pi_1(X, x_0) \not\cong \pi_1(Y, y_0)$, τότε $(X, x_0) \not\cong (Y, y_0)$. Αν επιπλέον οι X, Y είναι συνεκτικοί κατά δρόμους, η θεμελιώδης ομάδα δεν εξαρτάται, ως προς ισομορφισμό, από το σημείο βάσης, οπότε οι X και Y δεν είναι ομοιομορφικοί (Σχόλιο της §5.7). Η θεμελιώδης ομάδα λειτουργεί δηλαδή ως τοπολογικό αναλλοίωτο. Όταν διαφέρει, οι χώροι διαφέρουν. Όταν συμπίπτει, όπως δείχνει το (ii), δεν συμπεραίνουμε τίποτα.

Άσκηση 5.22 — Μια αντιστοιχία που δεν είναι συναρτητής

- i. Για $\text{id}_X : X \rightarrow X$ ο στόχος είναι πάλι το X , με σταθεροποιημένο στοιχείο x_0 , οπότε $F(\text{id}_X)(x_1, x_2) = (x_1, x_0)$. Έστω X με τουλάχιστον δύο στοιχεία και $x_2 \in X$ με $x_2 \neq x_0$. Τότε

$$F(\text{id}_X)(x_1, x_2) = (x_1, x_0) \neq (x_1, x_2) = \text{id}_{X \times X}(x_1, x_2).$$

Άρα $F(\text{id}_X) \neq \text{id}_{F(X)}$, δηλαδή ο νόμος των ταυτοτικών παραβιάζεται. (Για μονοσύνολο X η ισότητα ισχύει τετριμμένα.) $\square$

- ii. Η σύνθεση διατηρείται, και μάλιστα πάντα. Για $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ με σταθεροποιημένα στοιχεία $y_0 \in Y$, $z_0 \in Z$ έχουμε

$$F(g \circ f)(x_1, x_2) = (g(f(x_1)), z_0),$$

$$(F(g) \circ F(f))(x_1, x_2) = F(g)(f(x_1), y_0) = (g(f(x_1)), z_0).$$

Οι δύο εκφράσεις συμπίπτουν για κάθε f, g .

- iii. Ο F δεν είναι συναρτητής, αφού παραβιάζεται ο νόμος των ταυτοτικών, παρότι ο νόμος της σύνθεσης ικανοποιείται. Η άσκηση δείχνει ότι ο νόμος της σύνθεσης δεν συνεπάγεται τον νόμο των ταυτοτικών, οπότε ο δεύτερος πρέπει να ελέγχεται χωριστά. $\square$