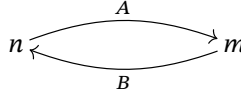


Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 4

Άσκηση 4.1 — Μήτρες και ισομορφισμοί

- i. Όχι, δεν μπορεί. Έστω $A : n \rightarrow m$ ισομορφισμός, δηλαδή μήτρα $m \times n$ για την οποία υπάρχει μήτρα B μεγέθους $n \times m$ με $BA = I_n$ και $AB = I_m$.



Από τη βαθμίδα έχουμε

$$n = \text{rank}(I_n) = \text{rank}(BA) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\} \leq \min\{m, n\},$$

άρα $n \leq m$. Ομοίως, από την $AB = I_m$ παίρνουμε $m = \text{rank}(I_m) = \text{rank}(AB) \leq \min\{m, n\}$, άρα $m \leq n$. Επομένως $n = m$, και μια μήτρα με $n \neq m$ δεν μπορεί να είναι ισομορφισμός. $\square$

- ii. $(\Rightarrow)$ Αν $n \cong m$, υπάρχουν μήτρες $A : n \rightarrow m$ και $B : m \rightarrow n$ με $BA = I_n$ και $AB = I_m$. Από το (i) αυτό επιβάλλει $n = m$.

$(\Leftarrow)$ Αν $n = m$, η $I_n : n \rightarrow n$ είναι ισομορφισμός, με αντίστροφο τον εαυτό της. $\square$

- iii. Στη $\mathbf{Mat}_{\mathbb{F}}$ ισχύει $n \cong m \iff n = m$, δηλαδή ισόμορφα αντικείμενα είναι ίσα. Στη $\mathbf{Set}$ δύο σύνολα είναι ισόμορφα όταν υπάρχει αμφίρριψη μεταξύ τους, χωρίς να χρειάζεται να ταυτίζονται. Για παράδειγμα, τα $\{1, 2\}$ και $\{a, b\}$ είναι ισόμορφα αλλά όχι ίσα.

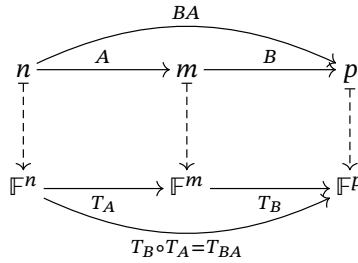
Η ταύτιση ισομορφίας και ισότητας στα αντικείμενα δεν σημαίνει ότι υπάρχει ένας μόνο ισομορφισμός $n \rightarrow n$. Οι ισομορφισμοί $n \rightarrow n$ είναι ακριβώς οι αντιστρέψιμες $n \times n$ μήτρες, δηλαδή τα στοιχεία της $GL_n(\mathbb{F})$.

Άσκηση 4.2 — Σύνδεση με Γραμμική Άλγεβρα

- i. Η I_n αντιστοιχεί στη γραμμική απεικόνιση $T_{I_n} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ με $T_{I_n}(\mathbf{v}) = I_n \mathbf{v} = \mathbf{v}$ για κάθε $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$. Άρα $T_{I_n} = \text{id}_{\mathbb{F}^n}$. $\square$
- ii. Έστω $A : n \rightarrow m$ και $B : m \rightarrow p$, με αντίστοιχες γραμμικές απεικονίσεις $T_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ και $T_B : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^p$. Για κάθε $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ έχουμε

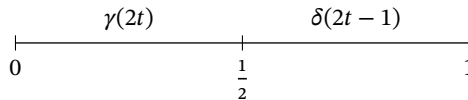
$$(T_B \circ T_A)(\mathbf{v}) = T_B(T_A(\mathbf{v})) = B(A\mathbf{v}) = (BA)\mathbf{v} = T_{BA}(\mathbf{v}).$$

Άρα $T_B \circ T_A = T_{BA}$, δηλαδή ο πολλαπλασιασμός μητρώων αντιστοιχεί στη σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων. Στο διάγραμμα, η πάνω γραμμή ζει στη $\mathbf{Mat}_{\mathbb{F}}$ και η κάτω στους διανυσματικούς χώρους. Η αντιστοίχιση μεταφέρει κάθε βέλος και κάθε σύνθεση από την πάνω γραμμή στην κάτω. $\square$



Άσκηση 4.3 — Μονοπάτια και η αναπαραμετροποίηση $2t$

- i. Αν ορίζαμε τη σύνθεση ως συνένωση στο $[0, 2]$, το αποτέλεσμα δεν θα ήταν μονοπάτι με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$, όπως απαιτεί ο ορισμός των μορφισμών. Η σύνθεση δύο μορφισμών δεν θα ήταν μορφισμός, και η σύνθεση τριών μονοπατιών θα είχε πεδίο ορισμού το $[0, 3]$, κ.λπ. Τα δεδομένα δεν θα όριζαν κατηγορία. Η αναπαραμετροποίηση με $2t$ και $2t - 1$ επαναφέρει το αποτέλεσμα στο διάστημα $[0, 1]$. Το γ διανύεται στο πρώτο μισό του χρόνου και το δ στο δεύτερο.



- ii. Η $\delta * \gamma$ ορίζεται ως

$$(\delta * \gamma)(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \delta(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Στο $t = 1/2$ ο πρώτος κλάδος δίνει $\gamma(1)$ και ο δεύτερος $\delta(0)$. Από την υπόθεση $\gamma(1) = \delta(0)$ οι δύο τιμές συμπίπτουν, άρα η $\delta * \gamma$ είναι καλά ορισμένη.

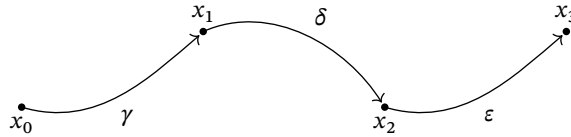
Τα $[0, 1/2]$ και $[1/2, 1]$ είναι κλειστά υποσύνολα του $[0, 1]$ με ένωση το $[0, 1]$. Ο περιορισμός της $\delta * \gamma$ σε καθένα από αυτά είναι συνεχής, ως σύνθεση της συνεχούς γ (αντίστοιχα δ) με μια συνεχή γραμμική συνάρτηση. Οι δύο περιορισμοί

συμφωνούν στην τομή $\{1/2\}$. Από το λήμμα επικόλλησης¹ η $\delta * \gamma$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$. $\square$

- iii. Οι περιορισμοί της h στα $A = [0, \frac{1}{2})$ και $B = [\frac{1}{2}, 1]$ είναι σταθερές συναρτήσεις, άρα συνεχείς. Η h όμως δεν είναι συνεχής στο $\frac{1}{2}$. Για την ακολουθία $t_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$ ισχύει $t_n \rightarrow \frac{1}{2}$ και $h(t_n) = 0$ για κάθε n , ενώ $h(\frac{1}{2}) = 1$. Το λήμμα επικόλλησης δεν εφαρμόζεται, επειδή το $A = [0, \frac{1}{2})$ δεν είναι κλειστό στο $[0, 1]$, καθώς δεν περιέχει το οριακό του σημείο $\frac{1}{2}$. Το B είναι κλειστό, αλλά η υπόθεση πρέπει να ισχύει και για τα δύο σύνολα. $\square$

Άσκηση 4.4 — Το πρόβλημα της προσεταιριστικότητας

ΑΣ σχεδιάσουμε πρώτα τα τρία διαδοχικά μονοπάτια. Το γ πηγαίνει από το x_0 στο x_1 , το δ από το x_1 στο x_2 και το ε από το x_2 στο x_3 .



- i. Για τη σύνθεση $(\varepsilon * \delta) * \gamma$ έχουμε

$$((\varepsilon * \delta) * \gamma)(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ (\varepsilon * \delta)(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Αναλύοντας τον δεύτερο κλάδο, το δ διανύεται στο $[1/2, 3/4]$ και το ε στο $[3/4, 1]$. Τη στιγμή $t = 1/2$ βρισκόμαστε στο σημείο $\gamma(1) = \delta(0) = x_1$, όπου τελειώνει το γ .

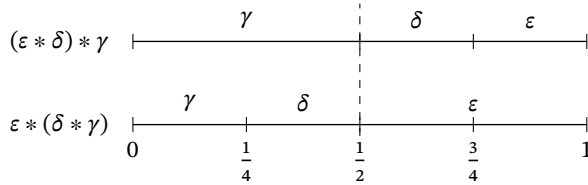
Για τη σύνθεση $\varepsilon * (\delta * \gamma)$ έχουμε

$$(\varepsilon * (\delta * \gamma))(t) = \begin{cases} (\delta * \gamma)(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \varepsilon(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

¹Λήμμα επικόλλησης (pasting lemma). Έστω $X = A \cup B$, όπου τα A και B είναι κλειστά υποσύνολα του X , και $f : A \rightarrow Y$, $g : B \rightarrow Y$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A \cap B$. Τότε η $h : X \rightarrow Y$ με $h(x) = f(x)$ για $x \in A$ και $h(x) = g(x)$ για $x \in B$ είναι συνεχής. Το λήμμα διατυπώνεται στην §4.4 του βιβλίου. Βλ. επίσης J. R. Munkres, *Topology*, 2η έκδοση, Prentice Hall, 2000, Θεώρημα 18.3.

Αναλύοντας τον πρώτο κλάδο, το γ διανύεται στο $[0, 1/4]$ και το δ στο $[1/4, 1/2]$. Τη στιγμή $t = 1/2$ βρισκόμαστε στο σημείο $\delta(1) = \varepsilon(0) = x_2$, όπου τελειώνει το δ .

Οι δύο κατανομές του χρόνου φαίνονται καθαρά αν τις βάλουμε τη μία κάτω από την άλλη. Η διακεκομμένη γραμμή είναι η στιγμή $t = 1/2$.



- ii. Αν τα σημεία $x_1 = \delta(0)$ και $x_2 = \delta(1)$ διαφέρουν, οι δύο συνθέσεις παίρνουν διαφορετικές τιμές τη στιγμή $t = 1/2$, άρα ως απεικονίσεις $[0, 1] \rightarrow X$ είναι διαφορετικές. Η σύνθεση μονοπατιών δεν είναι λοιπόν προσεταιριστική ως πράξη μεταξύ απεικονίσεων.

Οι δύο συνθέσεις διαφέρουν όμως μόνο κατά αναπααραμετροποίηση. Θεωρούμε τη συνεχή, γνησίως αύξουσα, τμηματικά γραμμική συνάρτηση $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ με

$$\varphi(t) = \begin{cases} t/2, & 0 \leq t \leq 1/2, \\ t - 1/4, & 1/2 \leq t \leq 3/4, \\ 2t - 1, & 3/4 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Ισχύει $\varphi(0) = 0$ και $\varphi(1) = 1$. Η φ στέλνει κάθε κομμάτι της πάνω γραμμής του διαγράμματος στο αντίστοιχο κομμάτι της κάτω, δηλαδή τα $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ και $[\frac{3}{4}, 1]$ στα $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ και $[\frac{1}{2}, 1]$ αντίστοιχα. Θέτουμε $\sigma = \varepsilon * (\delta * \gamma)$ και επαληθεύουμε κλάδο προς κλάδο ότι

$$(\varepsilon * \delta) * \gamma = \sigma \circ \varphi.$$

Πράγματι,

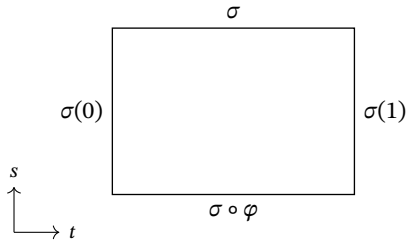
$$\begin{aligned} \sigma(\varphi(t)) &= \gamma(4 \cdot \frac{t}{2}) = \gamma(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \sigma(\varphi(t)) &= \delta(4(t - \frac{1}{4}) - 1) = \delta(4t - 2), & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \\ \sigma(\varphi(t)) &= \varepsilon(2(2t - 1) - 1) = \varepsilon(4t - 3), & t \in [\frac{3}{4}, 1], \end{aligned}$$

και οι τρεις κλάδοι συμπίπτουν με εκείνους της $(\varepsilon * \delta) * \gamma$ που υπολογίσαμε στο (i).

Δείχνουμε τώρα ότι μια τέτοια αναπαραμετροποίηση είναι ομοτοπική με το αρχικό μονοπάτι. Για το μονοπάτι σ και τη φ ορίζουμε

$$H(t, s) = \sigma((1-s)\varphi(t) + st).$$

Ο αριθμός $(1-s)\varphi(t) + st$ ανήκει στο $[0, 1]$, ως κυρτός συνδυασμός δύο αριθμών του $[0, 1]$, και η H είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών. Ισχύει $H(\cdot, 0) = \sigma \circ \varphi$ και $H(\cdot, 1) = \sigma$, ενώ $H(0, s) = \sigma(0)$ και $H(1, s) = \sigma(1)$ για κάθε s . Άρα $\sigma \circ \varphi \sim \sigma$ σχετικά με τα άκρα.



Επομένως, στο επίπεδο των κλάσεων ομοτοπίας,

$$[(\varepsilon * \delta) * \gamma] = [\varepsilon * (\delta * \gamma)],$$

δηλαδή $([\varepsilon] \circ [\delta]) \circ [\gamma] = [\varepsilon] \circ ([\delta] \circ [\gamma])$ στη $\Pi(X)$. Η προσεταιριστικότητα αποκαθίσταται όχι επειδή αλλάζει η σύνθεση, αλλά επειδή η ισότητα που απαιτούμε γίνεται ασθενέστερη. Ζητούμε ισότητα κλάσεων και όχι ισότητα απεικονίσεων. $\square$

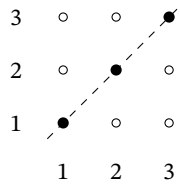
Άσκηση 4.5 — Αντικείμενα στην Rel

i. Η ταυτοτική σχέση είναι η διαγώνιος

$$\text{id}_A = \{(a, a) \mid a \in A\} = \Delta_A \subseteq A \times A.$$

Ως υποσύνολο του $A \times A$ σχεδιάζεται πάνω στη διαγώνιο του τετραγώνου, κατ' αναλογία με την ευθεία $y = x$ στο επίπεδο. Για παράδειγμα, για $A = \{1, 2, 3\}$ τα

σημεία του $A \times A$ είναι τα εννέα σημεία του πλέγματος, και η id_A αποτελείται από τα τρία μαύρα.



- ii. Ας δούμε πρώτα ότι το $\emptyset$ είναι αρχικό. Ένας μορφισμός $\emptyset \rightarrow B$ είναι σχέση $R \subseteq \emptyset \times B = \emptyset$. Το μόνο υποσύνολο του $\emptyset$ είναι το ίδιο το $\emptyset$, άρα $|\mathbf{Rel}(\emptyset, B)| = 1$ για κάθε B .

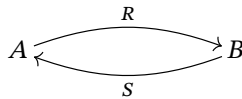
Με τον ίδιο τρόπο είναι και τελικό. Ένας μορφισμός $B \rightarrow \emptyset$ είναι σχέση $R \subseteq B \times \emptyset = \emptyset$, άρα $|\mathbf{Rel}(B, \emptyset)| = 1$ για κάθε B .

$$\emptyset \xrightarrow{!} B \xrightarrow{!} \emptyset$$

Το $\emptyset$ είναι λοιπόν μηδενικό αντικείμενο. Από το $\emptyset$ προς κάθε σύνολο B υπάρχει ακριβώς μία σχέση, η κενή. Ας παρατηρήσουμε τη διαφορά από τη **Set**, όπου το $\emptyset$ είναι μόνο αρχικό, αφού από ένα μη κενό σύνολο προς το $\emptyset$ δεν υπάρχει καμία συνάρτηση. $\square$

Άσκηση 4.6 — Ισομορφισμοί στην Rel

Έστω $R \subseteq A \times B$ και $S \subseteq B \times A$ με $S \circ R = \text{id}_A$ και $R \circ S = \text{id}_B$.



- i. Ας δείξουμε πρώτα την ύπαρξη. Έστω $a \in A$. Επειδή $(a, a) \in \text{id}_A = S \circ R$, υπάρχει $b \in B$ με $(a, b) \in R$ και $(b, a) \in S$.

Για τη μοναδικότητα, έστω $b' \in B$ με $(a, b') \in R$. Από τα $(b, a) \in S$ και $(a, b') \in R$ έπεται $(b, b') \in R \circ S = \text{id}_B$, άρα $b' = b$.

Επομένως για κάθε $a \in A$ υπάρχει ακριβώς ένα $b \in B$ με $(a, b) \in R$. $\square$

- ii. Από το (i) η $f : A \rightarrow B$ με $f(a) = b \iff (a, b) \in R$ είναι καλά ορισμένη συνάρτηση.

Η f είναι επίρριψη. Έστω $b \in B$. Επειδή $(b, b) \in \text{id}_B = R \circ S$, υπάρχει $a \in A$ με $(b, a) \in S$ και $(a, b) \in R$. Άρα $f(a) = b$.

Η f είναι και έρριψη. Έστω $f(a_1) = f(a_2) = b$, δηλαδή $(a_1, b), (a_2, b) \in R$. Από την προηγούμενη παράγραφο υπάρχει $a \in A$ με $(b, a) \in S$. Τότε $(a_1, a) \in S \circ R = \text{id}_A$, άρα $a_1 = a$. Ομοίως $(a_2, a) \in S \circ R = \text{id}_A$, άρα $a_2 = a$. Επομένως $a_1 = a_2$.

Η f είναι αμφίρριψη, δηλαδή ισομορφισμός στη **Set**. □

iii. Από τα (i) και (ii) κάθε ισομορφισμός R της **Rel** έχει τη μορφή

$$R = \{(a, f(a)) \mid a \in A\},$$

δηλαδή είναι ο γράφος ενός ισομορφισμού f της **Set**.

Αντίστροφα, αν $f : A \rightarrow B$ είναι αμφίρριψη και R ο γράφος της, τότε ο γράφος S της f^{-1} ικανοποιεί $S \circ R = \text{id}_A$ και $R \circ S = \text{id}_B$, άρα το R είναι ισομορφισμός στη **Rel**.

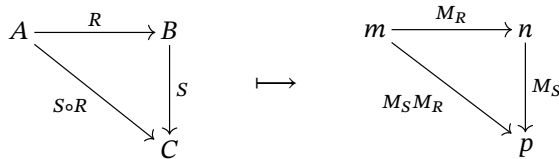
Οι ισομορφισμοί της **Rel** ταυτίζονται λοιπόν με τους ισομορφισμούς της **Set**, θεωρημένους ως γράφους. □

Άσκηση 4.7 — Δυαδικές μήτρες (Boolean) και σχέσεις

i. Από τον ορισμό, $(a_i, c_k) \in S \circ R$ αν και μόνο αν υπάρχει $b_j \in B$ με $(a_i, b_j) \in R$ και $(b_j, c_k) \in S$. Σε δυαδικούς όρους αυτό γράφεται

$$(M_{S \circ R})_{ki} = \bigvee_{j=1}^n ((M_S)_{kj} \wedge (M_R)_{ji}).$$

Το δεξί μέλος είναι ακριβώς το στοιχείο (k, i) του δυαδικού γινομένου $M_S M_R$, που έχει μέγεθος $p \times m$, όπως πρέπει. Άρα $M_{S \circ R} = M_S M_R$. Στο διάγραμμα, το τρίγωνο των σχέσεων μεταφέρεται σε τρίγωνο μητρών με την ίδια μορφή. □



- ii. Ισχύει $(M_{R^{-1}})_{ij} = 1$ αν και μόνο αν $(b_j, a_i) \in R^{-1}$, δηλαδή αν και μόνο αν $(a_i, b_j) \in R$, δηλαδή αν και μόνο αν $(M_R)_{ji} = 1$. Άρα $M_{R^{-1}} = M_R^T$. $\square$
- iii. Ο ταυτοτικός $\text{id}_A = \Delta_A$ αντιστοιχεί στη δυαδική μοναδιαία μήτρα I_m μεγέθους $m \times m$, αφού $(M_{\text{id}_A})_{ij} = 1$ αν και μόνο αν $(a_j, a_i) \in \Delta_A$, δηλαδή αν και μόνο αν $i = j$.
- iv. Για να ορίζεται η αντιστοίχιση, σταθεροποιούμε για κάθε πεπερασμένο σύνολο μια αρίθμηση των στοιχείων του. Η αντιστοίχιση στέλνει κάθε σύνολο A με m στοιχεία στον αριθμό m και κάθε σχέση R στη μήτρα M_R . Ο στόχος της είναι η κατηγορία με αντικείμενα τους φυσικούς αριθμούς και μορφισμούς $m \rightarrow n$ τις δυαδικές μήτρες $n \times m$, με σύνθεση το δυαδικό γινόμενο, ανάλογα με τη $\mathbf{Mat}_{\mathbb{F}}$. Από τα (i) και (iii) σέβεται τη σύνθεση και τους ταυτοτικούς.

Σε επίπεδο αντικειμένων δεν είναι αμφίρριψη. Είναι επί, αφού κάθε m είναι το πλήθος των στοιχείων του $\{1, \dots, m\}$, αλλά δεν είναι ένα προς ένα, αφού για παράδειγμα τα $\{1\}$ και $\{2\}$ αντιστοιχίζονται και τα δύο στο 1.

Σε επίπεδο Hom-συνόλων είναι αμφίρριψη. Για σύνολα A με m στοιχεία και B με n στοιχεία, κάθε σχέση $R \subseteq A \times B$ καθορίζει μοναδικά τη μήτρα M_R , και αντίστροφα κάθε δυαδική μήτρα M μεγέθους $n \times m$ καθορίζει μοναδικά τη σχέση R_M με $(a_j, b_i) \in R_M \iff M_{ij} = 1$.

Η αντιστοίχιση δεν είναι λοιπόν ισομορφισμός κατηγοριών, γιατί ταυτίζει διαφορετικά σύνολα με το ίδιο πλήθος στοιχείων. Είναι όμως αμφίρριψη σε κάθε Hom-σύνολο και φτάνει σε κάθε αντικείμενο. Με την ορολογία του Κεφαλαίου 7 είναι πιστή, πλήρης και ουσιωδώς επί, άρα ισοδυναμία κατηγοριών. Οι υπολογισμοί στη **Rel** μεταξύ πεπερασμένων συνόλων μεταφράζονται πλήρως σε πράξεις δυαδικών μητρών. $\square$

Άσκηση 4.8 — Το αντίστροφο μονοπάτι

- i. Η $\bar{\gamma} * \gamma$ δίνεται από

$$(\bar{\gamma} * \gamma)(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \bar{\gamma}(2t - 1) = \gamma(2 - 2t), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Επειδή το γ δεν είναι σταθερό, υπάρχει $t_0 \in [0, 1]$ με $\gamma(t_0) \neq x$. Τότε $(\bar{\gamma} * \gamma)(t_0/2) = \gamma(t_0) \neq x = c_x(t_0/2)$, άρα οι $\bar{\gamma} * \gamma$ και c_x είναι διαφορετικές απεικονίσεις. Όταν $x \neq y$ αρκεί και το $t_0 = 1$, αφού $(\bar{\gamma} * \gamma)(1/2) = \gamma(1) = y \neq x$. $\square$

ii. Ορίζουμε

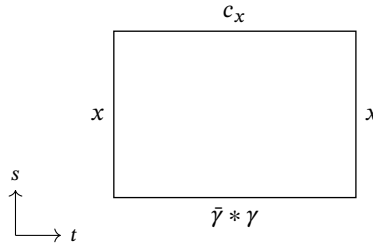
$$H(t, s) = \begin{cases} \gamma(2t(1-s)), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \gamma(2(1-t)(1-s)), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Στο $t = 1/2$ και οι δύο κλάδοι δίνουν $\gamma(1-s)$, άρα η H είναι καλά ορισμένη. Είναι συνεχής σε καθένα από τα κλειστά $[0, \frac{1}{2}] \times [0, 1]$ και $[\frac{1}{2}, 1] \times [0, 1]$ ως σύνθεση συνεχών, και οι δύο περιορισμοί συμφωνούν στην τομή. Από το λήμμα επικόλλησης η H είναι συνεχής.

Για $s = 0$ έχουμε $H(t, 0) = \gamma(2t)$ αν $t \leq 1/2$ και $H(t, 0) = \gamma(2-2t)$ αν $t \geq 1/2$, δηλαδή $H(\cdot, 0) = \tilde{\gamma} * \gamma$.

Για $s = 1$ έχουμε $H(t, 1) = \gamma(0) = x$ για κάθε t , δηλαδή $H(\cdot, 1) = c_x$.

Για τα άκρα, $H(0, s) = \gamma(0) = x$ και $H(1, s) = \gamma(0) = x$ για κάθε s , άρα η ομοτοπία διατηρεί τα άκρα. Το τετράγωνο συγκεντρώνει τις τιμές της H στις τέσσερις πλευρές.



Τη στιγμή s το μονοπάτι $H(\cdot, s)$ προχωρά κατά μήκος του γ μέχρι το σημείο $\gamma(1-s)$ και επιστρέφει. □

Άσκηση 4.9 — Ομοτοπία ως σχέση ισοδυναμίας

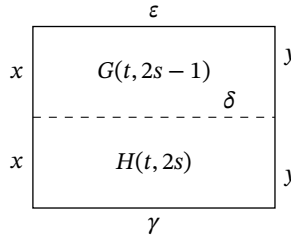
Γράφουμε $\gamma \sim \delta$ για την ομοτοπία σχετικά με τα άκρα, στο σύνολο των μονοπατιών από x σε y .

- i. Για την ανακλαστικότητα ορίζουμε, για κάθε γ , τη σταθερή ομοτοπία $H(t, s) = \gamma(t)$. Η H είναι συνεχής, $H(\cdot, 0) = H(\cdot, 1) = \gamma$, και $H(0, s) = x$, $H(1, s) = y$ για κάθε s . Άρα $\gamma \sim \gamma$.
- ii. Για τη συμμετρία, αν $\gamma \sim \delta$ μέσω της H , ορίζουμε $H'(t, s) = H(t, 1-s)$. Η H' είναι συνεχής, $H'(\cdot, 0) = H(\cdot, 1) = \delta$, $H'(\cdot, 1) = H(\cdot, 0) = \gamma$, και διατηρεί τα άκρα. Άρα $\delta \sim \gamma$. Στο τετράγωνο αυτό σημαίνει ότι το διαβάζουμε από πάνω προς τα κάτω.

iii. Για τη μεταβατικότητα, αν $\gamma \sim \delta$ μέσω της H και $\delta \sim \varepsilon$ μέσω της G , ορίζουμε

$$F(t, s) = \begin{cases} H(t, 2s), & 0 \leq s \leq 1/2, \\ G(t, 2s - 1), & 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Στο $s = 1/2$ οι δύο κλάδοι δίνουν $H(t, 1) = \delta(t) = G(t, 0)$, άρα η F είναι καλά ορισμένη. Τα $[0, 1] \times [0, \frac{1}{2}]$ και $[0, 1] \times [\frac{1}{2}, 1]$ είναι κλειστά, οπότε από το λήμμα επικόλλησης η F είναι συνεχής. Ισχύει $F(\cdot, 0) = \gamma$ και $F(\cdot, 1) = \varepsilon$, ενώ $F(0, s) = x$ και $F(1, s) = y$ για κάθε s . Άρα $\gamma \sim \varepsilon$. Γεωμετρικά, τοποθετούμε το τετράγωνο της G πάνω από το τετράγωνο της H και συμπιέζουμε το αποτέλεσμα στο ύψος ενός τετραγώνου.



Η ομοτοπία σχετικά με τα άκρα είναι λοιπόν σχέση ισοδυναμίας. □