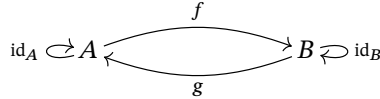


Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 3

Άσκηση 3.1 — Επαλήθευση ορισμού

Ας σχεδιάσουμε πρώτα τα δεδομένα. Τα δύο αντικείμενα συνδέονται με τα βέλη f και g , και κάθε αντικείμενο έχει τον ταυτοτικό του.



Η πληροφορία $g \circ f = \text{id}_A$ και $f \circ g = \text{id}_B$ σημαίνει ότι η διαδρομή από το A στο B και πίσω είναι η id_A , και η διαδρομή από το B στο A και πίσω είναι η id_B .

i. Τα Hom-σύνολα είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(A, A) &= \{\text{id}_A\}, & \mathcal{C}(A, B) &= \{f\}, \\ \mathcal{C}(B, A) &= \{g\}, & \mathcal{C}(B, B) &= \{\text{id}_B\}. \end{aligned}$$

ii. Ας δούμε πρώτα τις τριάδες h, k, l στις οποίες υπάρχει κάποιος ταυτοτικός μορφισμός. Λόγω του νόμου της ταυτοτικής, ο ταυτοτικός μορφισμός «εξαφανίζεται» και από τις δύο πλευρές, οπότε και οι δύο πλευρές γίνονται η σύνθεση των δύο άλλων μορφισμών. Για παράδειγμα, για την τριάδα $\text{id}_B, f, \text{id}_A$ έχουμε

$$\text{id}_B \circ (f \circ \text{id}_A) = \text{id}_B \circ f = f, \quad (\text{id}_B \circ f) \circ \text{id}_A = f \circ \text{id}_A = f.$$

Μένουν οι τριάδες χωρίς ταυτοτικούς. Οι μόνοι μη ταυτοτικοί μορφισμοί είναι οι $f : A \rightarrow B$ και $g : B \rightarrow A$, που πρέπει να εναλλάσσονται, άρα οι τριάδες αυτές είναι μόνο δύο.

- Για την τριάδα f, g, f έχουμε $f \circ (g \circ f) = f \circ \text{id}_A = f$ και $(f \circ g) \circ f = \text{id}_B \circ f = f$. ✓
- Για την τριάδα g, f, g έχουμε $g \circ (f \circ g) = g \circ \text{id}_B = g$ και $(g \circ f) \circ g = \text{id}_A \circ g = g$. ✓

iii. Ο νόμος της ταυτοτικής ισχύει, γιατί $f \circ \text{id}_A = f = \text{id}_B \circ f$, $g \circ \text{id}_B = g = \text{id}_A \circ g$, $\text{id}_A \circ \text{id}_A = \text{id}_A$ και $\text{id}_B \circ \text{id}_B = \text{id}_B$. ✓

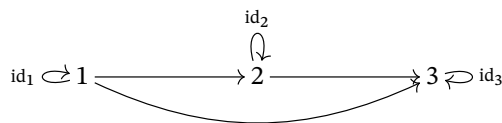
iv. Τα δεδομένα ορίζουν λοιπόν κατηγορία, με συνολικά τέσσερις μορφισμούς, τους $\text{id}_A, \text{id}_B, f$ και g .

Άσκηση 3.2 — Υπολογισμός Hom-συνόλων

- i. Το $\mathbf{Set}(\{1, 2\}, \{a, b, c\})$ έχει $3^2 = 9$ στοιχεία, αφού καθένα από τα δύο στοιχεία του $\{1, 2\}$ έχει τρεις επιλογές.
- ii. Το $\mathbf{Set}(\{1, 2, 3\}, \{0, 1\})$ έχει $2^3 = 8$ στοιχεία, αφού καθένα από τα τρία στοιχεία του $\{1, 2, 3\}$ έχει δύο επιλογές.
- iii. Ισχύει $|\mathbf{Set}(A, B)| = n^m$, γιατί καθένα από τα m στοιχεία του A στέλνεται σε ένα από τα n στοιχεία του B , ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα.
- iv. Τα Hom-σύνολα του poset $P = \{1, 2, 3\}$ με $1 \leq 2 \leq 3$ είναι

$$\begin{array}{lll} \mathcal{P}(1, 1) = \{\text{id}_1\}, & \mathcal{P}(1, 2) = \{(1 \rightarrow 2)\}, & \mathcal{P}(1, 3) = \{(1 \rightarrow 3)\}, \\ \mathcal{P}(2, 1) = \emptyset, & \mathcal{P}(2, 2) = \{\text{id}_2\}, & \mathcal{P}(2, 3) = \{(2 \rightarrow 3)\}, \\ \mathcal{P}(3, 1) = \emptyset, & \mathcal{P}(3, 2) = \emptyset, & \mathcal{P}(3, 3) = \{\text{id}_3\}. \end{array}$$

Στο διάγραμμα φαίνονται όλα τα μη κενά Hom-σύνολα. Τα κενά αντιστοιχούν στα βέλη που λείπουν, δηλαδή σε όλα τα βέλη που θα πήγαιναν «προς τα πίσω».



Άσκηση 3.3 — Hom-σύνολα στη $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$

- i. Ο ταυτοτικός id_2 είναι η 2×2 μοναδιαία μήτρα

$$\text{id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

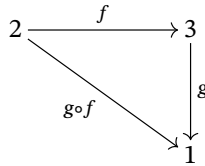
- ii. Ένα παράδειγμα είναι οι μορφισμοί

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} : 2 \rightarrow 3, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} : 3 \rightarrow 1.$$

Η f είναι 3×2 μήτρα και η g είναι 1×3 , όπως απαιτεί ο ορισμός των Hom-συνόλων. Η σύνθεση $g \circ f$ είναι το γινόμενο των μητρών

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} : 2 \rightarrow 1.$$

Το αποτέλεσμα είναι 1×2 μήτρα, δηλαδή μορφισμός $2 \rightarrow 1$, όπως δείχνει και το τρίγωνο.



Άσκηση 3.4 — Τι είναι και τι δεν είναι κατηγορία

Σε κάθε περίπτωση σχεδιάζουμε πρώτα τα δεδομένα. Το διάγραμμα δείχνει αμέσως τι λείπει.

- i. Δεν είναι κατηγορία. Παραβιάζεται ο νόμος της ταυτοτικής, αφού δεν υπάρχει id_A ούτε id_B . Στο διάγραμμα λείπουν οι βρόχοι των δύο αντικειμένων.

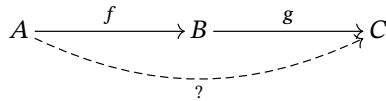
$$A \xrightarrow{f} B$$

- ii. Ναι, είναι κατηγορία με ένα αντικείμενο και δύο βρόχους.

Ο e είναι ουδέτερος, αφού $e \circ e = e$, $e \circ f = f$ και $f \circ e = f$. Με την αντιστοίχιση $e \leftrightarrow 0, f \leftrightarrow 1$ ο πίνακας της σύνθεσης γίνεται ο πίνακας της πρόσθεσης modulo 2 στο $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, που είναι προσεταιριστική. Άρα και η σύνθεση είναι προσεταιριστική. Μπορούμε επίσης να το ελέγξουμε απευθείας στις $2^3 = 8$ τριάδες. Η δομή που αναγνωρίζουμε είναι η ομάδα $\mathbb{Z}_2$.

- iii. Δεν είναι κατηγορία. Παραβιάζεται η κλειστότητα της σύνθεσης. Οι $f : A \rightarrow B$ και $g : B \rightarrow C$ είναι συνθέσιμοι, άρα πρέπει να υπάρχει μορφισμός

$g \circ f : A \rightarrow C$, ενώ εδώ η σύνθεση δεν ορίζεται. Στο διάγραμμα το βέλος που λείπει είναι το διακεκομμένο.



Άσκηση 3.5 — Μονοειδή ως κατηγορίες

- i. Ένας μορφισμός $m \in \mathcal{C}_M(*, *)$ είναι ισομορφισμός αν υπάρχει $n \in M$ με $m \cdot n = e = n \cdot m$. Αυτό σημαίνει ότι το m είναι αντιστρέψιμο στο μονοειδές. Αν όλοι οι μορφισμοί είναι ισομορφισμοί, κάθε στοιχείο του M είναι αντιστρέψιμο, δηλαδή το M είναι ομάδα.

$$m \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} * \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{array} n \quad m \cdot n = e = n \cdot m$$

- ii. Στο $(\mathbb{Z}, +, 0)$ κάθε n έχει αντίστροφο το $-n$. Άρα όλοι οι μορφισμοί είναι ισομορφισμοί, αφού η $(\mathbb{Z}, +)$ είναι ομάδα.
- iii. Στο $(\mathbb{Z}_n, +_n, 0)$ κάθε k έχει αντίστροφο το $-k \bmod n$. Και πάλι όλοι οι μορφισμοί είναι ισομορφισμοί.

Άσκηση 3.6 — Διακριτή κατηγορία

- i. Η $\mathcal{D}(X)$ έχει τρεις μορφισμούς, μόνο τους ταυτοτικούς $\text{id}_a, \text{id}_b, \text{id}_c$.

$$\text{id}_a \curvearrowright a \qquad \begin{array}{c} \text{id}_b \\ \curvearrowright \\ b \end{array} \qquad c \curvearrowright \text{id}_c$$

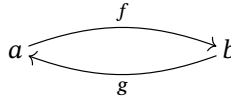
- ii. Δεν υπάρχει αρχικό αντικείμενο. Για να είναι το a αρχικό, θα έπρεπε να υπάρχει μοναδικός μορφισμός $a \rightarrow b$ και $a \rightarrow c$, αλλά δεν υπάρχει κανένας. Το ίδιο ισχύει για τα b και c . Ομοίως δεν υπάρχει τελικό αντικείμενο.
- iii. Μόνο οι ταυτοτικοί είναι ισομορφισμοί. Ο id_x έχει αντίστροφο τον εαυτό του, και δεν υπάρχουν άλλοι μορφισμοί.

- iv. Το αντίστοιχο poset είναι η διακριτή διάταξη στο X , όπου $x \leq y$ μόνο αν $x = y$. Το διάγραμμα Hasse αποτελείται από τρεις απομονωμένους κόμβους, χωρίς καμία γραμμή.

$a \qquad \qquad b \qquad \qquad c$

Άσκηση 3.7 — Ισομορφισμοί σε posets

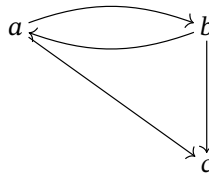
- i. Αν $f: a \rightarrow b$ είναι ισομορφισμός, υπάρχει $g: b \rightarrow a$ με $g \circ f = \text{id}_a$ και $f \circ g = \text{id}_b$. Η ύπαρξη του βέλους f εκφράζει τη σχέση $a \leq b$, ενώ η ύπαρξη του g εκφράζει τη σχέση $b \leq a$. Στο poset υπάρχουν λοιπόν βέλη και προς τις δύο κατευθύνσεις.



- ii. Από την αντισυμμετρία, τα $a \leq b$ και $b \leq a$ συνεπάγονται $a = b$. Άρα $f: a \rightarrow a$ και $g: a \rightarrow a$. Σε poset το $\mathcal{P}(a, a)$ έχει ακριβώς ένα στοιχείο, την ταυτοτική. Άρα $f = g = \text{id}_a$, και οι μόνοι ισομορφισμοί σε poset είναι οι ταυτοτικοί. $\square$

Άσκηση 3.8 — Προ-διάταξη που δεν είναι poset

Ας σχεδιάσουμε πρώτα τη σχέση, με ένα βέλος για κάθε ζεύγος $x \lesssim y$, παραλείποντας τους βρόχους $x \lesssim x$.



- i. Η ανακλαστικότητα, $x \lesssim x$ για κάθε x , δίνεται. Για τη μεταβατικότητα, οι αλυσίδες $x \lesssim y \lesssim z$ όπου κάποια από τις δύο σχέσεις είναι της μορφής $x \lesssim x$ δεν δίνουν τίποτα νέο. Επειδή από το c δεν ξεκινά καμία σχέση εκτός από την $c \lesssim c$, οι υπόλοιπες αλυσίδες είναι οι τέσσερις

$$\begin{aligned} a \lesssim b \lesssim a &\Rightarrow a \lesssim a, & b \lesssim a \lesssim b &\Rightarrow b \lesssim b, \\ a \lesssim b \lesssim c &\Rightarrow a \lesssim c, & b \lesssim a \lesssim c &\Rightarrow b \lesssim c, \end{aligned}$$

και σε όλες το συμπέρασμα ισχύει. $\checkmark$

- ii. Δεν είναι μερική διάταξη, αφού $a \lesssim b$ και $b \lesssim a$, ενώ $a \neq b$. Παραβιάζεται η αντισυμμετρία. Στο διάγραμμα αυτό φαίνεται από το ζεύγος των βελών ανάμεσα στα a και b .
- iii. Τα Hom-σύνολα της κατηγορίας, που τη συμβολίζουμε $\mathcal{Q}$, είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(a, a) &= \{\text{id}_a\}, & \mathcal{Q}(b, b) &= \{\text{id}_b\}, & \mathcal{Q}(c, c) &= \{\text{id}_c\}, \\ \mathcal{Q}(a, b) &= \{(a \rightarrow b)\}, & \mathcal{Q}(b, a) &= \{(b \rightarrow a)\}, \\ \mathcal{Q}(a, c) &= \{(a \rightarrow c)\}, & \mathcal{Q}(b, c) &= \{(b \rightarrow c)\}, \\ \mathcal{Q}(c, a) &= \emptyset, & \mathcal{Q}(c, b) &= \emptyset. \end{aligned}$$

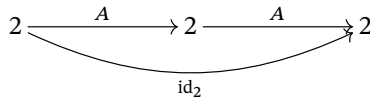
- iv. Τα a και b είναι ισόμορφα. Υπάρχει βέλος $a \rightarrow b$ και βέλος $b \rightarrow a$. Επειδή κάθε Hom-σύνολο μεταξύ συγκρίσιμων στοιχείων έχει ακριβώς ένα στοιχείο, η σύνθεση $(b \rightarrow a) \circ (a \rightarrow b)$ είναι το μοναδικό βέλος $a \rightarrow a$, δηλαδή η id_a . Ομοίως $(a \rightarrow b) \circ (b \rightarrow a) = \text{id}_b$. Άρα $a \cong b$. Το c είναι ισόμορφο μόνο με τον εαυτό του, αφού από το c δεν ξεκινά κανένα βέλος προς τα a και b . Το αποτέλεσμα δεν αντιφάσκει με την Άσκηση 3.7, γιατί η αντισυμμετρία δεν ισχύει εδώ, οπότε ισόμορφα αντικείμενα μπορεί να είναι διαφορετικά.

Άσκηση 3.9 — Ισομορφισμοί στη $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$

- i. Η $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ είναι ισομορφισμός, γιατί $A^2 = I_2$,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Ο αντίστροφός της είναι η ίδια, $A^{-1} = A$. Στο διάγραμμα, η διαδρομή $2 \rightarrow 2 \rightarrow 2$ με δύο φορές το A είναι η ταυτοτική.



- ii. Η $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ δεν είναι ισομορφισμός. Αν υπήρχε μήτρα C με $CB = I_2$, θα είχαμε $\det(C)\det(B) = \det(I_2) = 1$. Όμως $\det(B) = 0$, άρα τέτοια μήτρα δεν υπάρχει.

iii. Ο πυρήνας της $T_B(x, y) = (x + 2y, 0)$ είναι

$$\ker(T_B) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\} = \langle (-2, 1) \rangle,$$

και η εικόνα της είναι

$$\text{Im}(T_B) = \{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0) \rangle.$$

Άσκηση 3.10 — Ισομορφισμοί, μονομορφισμοί και επιμορφισμοί

- i. Έστω $f : A \rightarrow B$ ισομορφισμός με αντίστροφο $g : B \rightarrow A$. Ας ξεκινήσουμε από τον μονομορφισμό. Έστω $h, k : X \rightarrow A$ με $f \circ h = f \circ k$. Στο διάγραμμα ακολουθούμε τα δύο βέλη ως το B και γυρίζουμε πίσω με τον g .

$$X \xrightarrow[h]{h} A \xleftarrow[g]{f} B$$

Η επιστροφή ακυρώνει τον f , αφού $g \circ f = \text{id}_A$, και παίρνουμε

$$h = (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ k) = (g \circ f) \circ k = k.$$

Άρα ο f είναι μονομορφισμός. Δυϊκά, έστω $h, k : B \rightarrow X$ με $h \circ f = k \circ f$. Τώρα ξεκινάμε από το B , πηγαίνουμε πρώτα με τον g στο A και συνεχίζουμε με τον f , και επειδή $f \circ g = \text{id}_B$ παίρνουμε

$$h = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = (k \circ f) \circ g = k \circ (f \circ g) = k.$$

Άρα ο f είναι και επιμορφισμός.

- ii. Στην κατηγορία ενός poset υπάρχει το πολύ ένας μορφισμός από ένα αντικείμενο προς ένα άλλο. Έστω $f : a \rightarrow b$ και $h, k : x \rightarrow a$ με $f \circ h = f \circ k$. Οι h και k είναι μορφισμοί $x \rightarrow a$, άρα $h = k$. Ο f είναι λοιπόν μονομορφισμός, και με το ίδιο επιχείρημα για μορφισμούς $b \rightarrow x$ είναι και επιμορφισμός. Αφού $a \neq b$, από την Άσκηση 3.7 ο f δεν είναι ισομορφισμός. Στο διάγραμμα δύο «παράλληλα» βέλη $x \rightarrow a$ είναι πάντα το ίδιο βέλος, οπότε ο έλεγχος του ορισμού περνά χωρίς κόπο, ενώ το βέλος $b \rightarrow a$ που θα χρειαζόταν ο αντίστροφος δεν υπάρχει.

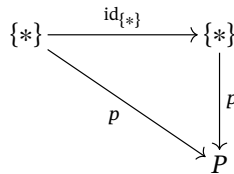
$$x \xrightarrow{h=k} a \xrightarrow{f} b$$

↖-----↗
?

- iii. Το αντίστροφο του (i) δεν ισχύει γενικά. Ένας μορφισμός μπορεί να είναι μονομορφισμός και επιμορφισμός χωρίς να είναι ισομορφισμός. Σε ορισμένες κατηγορίες, όπως η **Set**, ένας μορφισμός που είναι μονομορφισμός και επιμορφισμός είναι ισομορφισμός, αλλά αυτό είναι ιδιότητα της συγκεκριμένης κατηγορίας και όχι γενικός κανόνας.

Άσκηση 3.11 — Στοιχεία ως μορφισμοί

- i. Μια μονότονη $p : \{*\} \rightarrow P$ αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο $p(*) \in P$. Η μονοτονία ικανοποιείται αυτόματα, αφού η μοναδική σχέση στο $\{*\}$ είναι η $* \leq *$.
- ii. Λέμε ότι $p \leq q$ ως απεικονίσεις αν $p(*) \leq q(*)$ στο P . Δηλαδή η διάταξη μεταξύ των απεικονίσεων αντανακλά τη διάταξη των αντίστοιχων στοιχείων.
- iii. Η $\text{id}_{\{*\}} : \{*\} \rightarrow \{*\}$ είναι η μοναδική απεικόνιση $\{*\} \rightarrow \{*\}$. Στην ερμηνεία αυτή αντιστοιχεί στο μοναδικό στοιχείο $*$ του poset $\{*\}$. Επιπλέον, για κάθε $p : \{*\} \rightarrow P$ ισχύει $p \circ \text{id}_{\{*\}} = p$, δηλαδή το τρίγωνο είναι αντιμεταθετικό, και η σύνθεση με την ταυτοτική δεν αλλάζει το στοιχείο που επιλέγει η p .



- iv. Ναι, μπορούμε. Κάθε στοιχείο $a \in P$ αντιστοιχεί στην απεικόνιση p_a με $p_a(*) = a$, και $a \leq b$ αν και μόνο αν $p_a \leq p_b$. Το poset P περιγράφεται επομένως πλήρως από τις απεικονίσεις $\{*\} \rightarrow P$ και τη διάταξη μεταξύ τους.

Άσκηση 3.12 — Η αντίθετη κατηγορία

Ακολουθούμε τον συμβολισμό της §3.7. Ένας μορφισμός $f^{\text{op}} \in \mathcal{C}^{\text{op}}(A, B)$ είναι ένας μορφισμός $f : B \rightarrow A$ της $\mathcal{C}$.

- i. Έστω $f^{\text{op}} \in \mathcal{C}^{\text{op}}(A, B)$ και $g^{\text{op}} \in \mathcal{C}^{\text{op}}(B, C)$, δηλαδή $f : B \rightarrow A$ και $g : C \rightarrow B$ στην $\mathcal{C}$. Η σύνθεσή τους στην $\mathcal{C}^{\text{op}}$ πρέπει να είναι μορφισμός $A \rightarrow C$ της $\mathcal{C}^{\text{op}}$, δηλαδή μορφισμός $C \rightarrow A$ της $\mathcal{C}$. Στην $\mathcal{C}$ έχουμε $g : C \rightarrow B$ και $f : B \rightarrow A$, και η μόνη σύνθεση που ορίζεται είναι η $f \circ g : C \rightarrow A$. Γι' αυτό

$$g^{\text{op}} \circ^{\text{op}} f^{\text{op}} = (f \circ g)^{\text{op}}.$$

Τα δύο διαγράμματα δείχνουν την ίδια διαδρομή. Στην $\mathcal{C}^{\text{op}}$ ακολουθούμε πρώτα το f^{op} και μετά το g^{op} , ενώ στην $\mathcal{C}$ η ίδια διαδρομή διανύεται ανάποδα, πρώτα με τον g και μετά με τον f .

$$\mathcal{C}^{\text{op}} : A \xrightarrow{f^{\text{op}}} B \xrightarrow{g^{\text{op}}} C \quad \mathcal{C} : A \xleftarrow{f} B \xleftarrow{g} C$$

$$(f \circ g)^{\text{op}} \quad f \circ g$$

- ii. Ας δούμε πρώτα την προσεταιριστικότητα. Έστω $f^{\text{op}} : A \rightarrow B$, $g^{\text{op}} : B \rightarrow C$ και $h^{\text{op}} : C \rightarrow D$ στην $\mathcal{C}^{\text{op}}$, δηλαδή $f : B \rightarrow A$, $g : C \rightarrow B$ και $h : D \rightarrow C$ στην $\mathcal{C}$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό της σύνθεσης και την προσεταιριστικότητα της $\mathcal{C}$ έχουμε

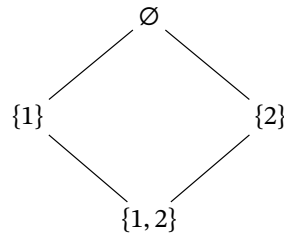
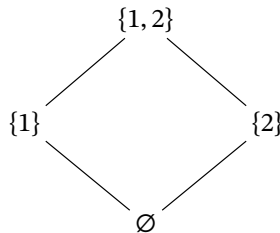
$$\begin{aligned} h^{\text{op}} \circ^{\text{op}} (g^{\text{op}} \circ^{\text{op}} f^{\text{op}}) &= h^{\text{op}} \circ^{\text{op}} (f \circ g)^{\text{op}} = ((f \circ g) \circ h)^{\text{op}} \\ &= (f \circ (g \circ h))^{\text{op}} = (g \circ h)^{\text{op}} \circ^{\text{op}} f^{\text{op}} \\ &= (h^{\text{op}} \circ^{\text{op}} g^{\text{op}}) \circ^{\text{op}} f^{\text{op}}. \end{aligned}$$

Ας δούμε τώρα τον νόμο της ταυτοτικής. Ο $(\text{id}_A)^{\text{op}}$ είναι ο ταυτοτικός του A στην $\mathcal{C}^{\text{op}}$. Πράγματι, για $f^{\text{op}} : A \rightarrow B$, δηλαδή $f : B \rightarrow A$, έχουμε

$$f^{\text{op}} \circ^{\text{op}} (\text{id}_A)^{\text{op}} = (\text{id}_A \circ f)^{\text{op}} = f^{\text{op}}, \quad (\text{id}_B)^{\text{op}} \circ^{\text{op}} f^{\text{op}} = (f \circ \text{id}_B)^{\text{op}} = f^{\text{op}}. \quad \square$$

Άσκηση 3.13 — Δυϊκότητα στα posets

- i. Στο διάγραμμα Hasse του $(P, \subseteq)$ το $\emptyset$ βρίσκεται κάτω, τα $\{1\}$ και $\{2\}$ στο ενδιάμεσο επίπεδο και το $\{1, 2\}$ στην κορυφή, σε σχήμα διαμαντιού.
- ii. Στο διάγραμμα Hasse του $(P, \supseteq)$ το $\{1, 2\}$ βρίσκεται κάτω, τα $\{1\}$ και $\{2\}$ στο ενδιάμεσο και το $\emptyset$ στην κορυφή. Είναι το ίδιο διαμάντι, ανεστραμμένο.



- iii. Αρχικό στο $(P, \subseteq)$ είναι το $\emptyset$, που είναι υποσύνολο κάθε στοιχείου του P . Αρχικό στο $(P, \supseteq)$ είναι το $\{1, 2\}$, που είναι υπερσύνολο κάθε στοιχείου του P . Και στα δύο διαγράμματα το αρχικό αντικείμενο βρίσκεται στη βάση, από όπου ξεκινά ένα βέλος προς κάθε άλλο στοιχείο.
- iv. Το αρχικό του $P^{\text{op}} = (P, \supseteq)$ είναι το $\{1, 2\}$, που είναι το τελικό αντικείμενο του $(P, \subseteq)$. Γενικά, ένα αρχικό αντικείμενο της $\mathcal{C}^{\text{op}}$ είναι τελικό αντικείμενο της $\mathcal{C}$, αφού τα βέλη που ξεκινούν από αυτό στην $\mathcal{C}^{\text{op}}$ είναι ακριβώς τα βέλη που καταλήγουν σε αυτό στην $\mathcal{C}$. $\square$

Άσκηση 3.14 — Η αντίθετη ενός μονοειδούς

- i. Η $\mathcal{C}_M^{\text{op}}$ έχει ένα αντικείμενο, το $*$, μορφισμούς τα στοιχεία του M , και σύνθεση $m \circ^{\text{op}} n = n \cdot m$, με αντίστροφη σειρά πολλαπλασιασμού.
- ii. Αντιστοιχεί στο μονοειδές $(M, \cdot^{\text{op}}, e)$, όπου $m \cdot^{\text{op}} n = n \cdot m$. Πρόκειται για το αντίθετο μονοειδές.
- iii. Ναι, ταυτίζεται. Για $M = (\mathbb{N}, +, 0)$ έχουμε $m +^{\text{op}} n = n + m = m + n$, αφού η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική. Άρα η $\mathcal{C}_M^{\text{op}}$ ταυτίζεται με την $\mathcal{C}_M$.
- iv. Έστω M το μονοειδές των 2×2 πραγματικών μητρώων με πολλαπλασιασμό. Επειδή γενικά $AB \neq BA$, η $\mathcal{C}_M^{\text{op}}$ δεν ταυτίζεται με την $\mathcal{C}_M$.¹

Άσκηση 3.15 — Τελικά αντικείμενα

Έστω T τελικό. Από τον ορισμό, για κάθε αντικείμενο X υπάρχει ακριβώς ένας μορφισμός $X \rightarrow T$. Εφαρμόζουμε αυτό για $X = T$, οπότε υπάρχει ακριβώς ένας μορφισμός $T \rightarrow T$. Ο id_T είναι ένας τέτοιος μορφισμός, άρα είναι ο μοναδικός. Με τον συμβολισμό του θαυμαστικού γράφουμε

$$X \xrightarrow{!} T \quad \text{!} = \text{id}_T$$

Όλη η απόδειξη είναι ένα «μέτρημα» βελών. Δεν χρειάστηκε να γνωρίζουμε τίποτα για το εσωτερικό του T . $\square$

¹Οι δύο κατηγορίες είναι πάντως ισόμορφες μέσω της αναστροφής $A \mapsto A^T$, αφού $(AB)^T = B^T A^T$. Η άσκηση ζητά να μην ταυτίζονται, όχι να μην είναι ισόμορφες.

Άσκηση 3.16 — Μοναδικότητα του ισομορφισμού

- i. Επειδή το T' είναι τελικό, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $f : T \rightarrow T'$. Επειδή το T είναι τελικό, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $g : T' \rightarrow T$. Ας ακολουθήσουμε τη διαδρομή $T \rightarrow T' \rightarrow T$.

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f} & T' \xrightarrow{g} T \\ & \searrow \text{id}_T & \nearrow \end{array}$$

Ο $g \circ f : T \rightarrow T$ είναι μορφισμός, και ο μοναδικός μορφισμός $T \rightarrow T$ είναι η id_T (Άσκηση 3.15). Άρα $g \circ f = \text{id}_T$, δηλαδή το διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό. Με το ίδιο επιχείρημα για τη διαδρομή $T' \rightarrow T \rightarrow T'$ παίρνουμε $f \circ g = \text{id}_{T'}$, και ο f είναι ισομορφισμός. Για τη μοναδικότητα, κάθε άλλος ισομορφισμός $T \rightarrow T'$ είναι και αυτός μορφισμός $T \rightarrow T'$, άρα συμπίπτει με τον f , αφού ο f είναι ο μοναδικός μορφισμός $T \rightarrow T'$.

- ii. Επειδή ο ισομορφισμός μεταξύ οποιωνδήποτε δύο τελικών αντικειμένων υπάρχει και είναι μοναδικός, όλα τα τελικά αντικείμενα είναι «ουσιαστικά το ίδιο», δηλαδή ισόμορφα. Δεν υπάρχει μάλιστα καμία επιλογή στο πώς τα ταυτίζουμε. Στην πράξη παίρνουμε έναν αντιπρόσωπο, για παράδειγμα το μονοσύνολο $\{*\}$ στα σύνολα, και τον αναφέρουμε ως «το» τελικό αντικείμενο.

Άσκηση 3.17 — Μηδενικό αντικείμενο

- i. Ένα παράδειγμα είναι η $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$, όπου ο μηδενικός χώρος $\{0\}$ είναι και αρχικός και τελικός, άρα μηδενικό αντικείμενο, όπως δείχνουμε στο (iii).
- ii. Ένα παράδειγμα είναι η $\mathbf{Set}$. Το $\emptyset$ είναι αρχικό και το $\{*\}$ τελικό, αλλά $\emptyset \not\cong \{*\}$. Ας το δούμε με βέλη. Ένας ισομορφισμός θα χρειαζόταν και ένα βέλος $\{*\} \rightarrow \emptyset$, δηλαδή μια συνάρτηση από ένα μη κενό σύνολο στο κενό, και τέτοια συνάρτηση δεν υπάρχει.

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{!} & \{*\} \\ \emptyset & \xleftarrow{?} & \end{array}$$

- iii. Στη $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$ το μηδενικό αντικείμενο είναι ο $\{0\}$. Είναι αρχικός, γιατί η μοναδική γραμμική απεικόνιση $\{0\} \rightarrow V$ στέλνει το 0 στο 0_V . Είναι τελικός, γιατί η μο-

ναδική γραμμική απεικόνιση $V \rightarrow \{0\}$ στέλνει κάθε v στο 0. Για κάθε χώρο V έχουμε λοιπόν

$$\{0\} \xrightarrow{!} V \xrightarrow{!} \{0\}$$

Άσκηση 3.18 — Αρχικό αντικείμενο στη $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$

- i. Το $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}(0, n)$ είναι το σύνολο των $n \times 0$ μητρώων. Υπάρχει ακριβώς μία τέτοια μήτρα, η κενή, οπότε $|\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}(0, n)| = 1$.
- ii. Για κάθε n υπάρχει ακριβώς ένας μορφισμός $0 \rightarrow n$. Άρα το 0 είναι αρχικό αντικείμενο.
- iii. Ναι, είναι και τελικό. Το $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}(n, 0)$ είναι το σύνολο των $0 \times n$ μητρώων, που έχει επίσης ακριβώς ένα στοιχείο. Άρα υπάρχει μοναδικός μορφισμός $n \rightarrow 0$ για κάθε n , και το 0 είναι μηδενικό αντικείμενο.

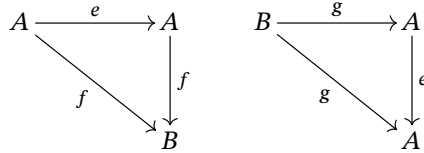
$$0 \xrightarrow{!} n \xrightarrow{!} 0$$

- iv. Στη $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$ ο μηδενικός χώρος $\{0\}$ παίζει τον ίδιο ρόλο, αφού υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση από ή προς το $\{0\}$ για κάθε V . Τα δύο διαγράμματα, εδώ και στην Άσκηση 3.17 (iii), έχουν ακριβώς το ίδιο σχήμα. Η αναλογία αυτή δεν είναι τυχαία. Ο αριθμός n αντιπροσωπεύει τον $\mathbb{R}^n$ και το 0 τον μηδενικό χώρο, και η $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$ είναι ισοδύναμη με την κατηγορία των πραγματικών διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης, με την έννοια της ισοδυναμίας κατηγοριών του Κεφαλαίου 7.

Άσκηση 3.19 — Αναδιατύπωση

- i. Στη γλώσσα των κατηγοριών ο ισχυρισμός γίνεται ο εξής. Αν $e \in \mathcal{C}(A, A)$ ικανοποιεί $f \circ e = f$ για κάθε αντικείμενο B και κάθε $f \in \mathcal{C}(A, B)$, τότε $e = \text{id}_A$. Για την απόδειξη αρκεί να πάρουμε $B = A$ και $f = \text{id}_A$. Τότε η υπόθεση δίνει $\text{id}_A \circ e = \text{id}_A$, και από τον νόμο της ταυτοτικής $\text{id}_A \circ e = e$. Άρα $e = \text{id}_A$. $\square$
- ii. Ο δυϊκός ισχυρισμός διατυπώνεται στην $\mathcal{C}^{\text{op}}$. Αν $e \in \mathcal{C}^{\text{op}}(A, A)$ ικανοποιεί $e \circ^{\text{op}} f = f$ για κάθε f με στόχο A στην $\mathcal{C}^{\text{op}}$, τότε $e = \text{id}_A$.
- iii. Μεταφρασμένος στην $\mathcal{C}$, ο δυϊκός ισχυρισμός λέει ότι αν $e \in \mathcal{C}(A, A)$ ικανοποιεί $e \circ g = g$ για κάθε αντικείμενο B και κάθε $g \in \mathcal{C}(B, A)$, τότε $e = \text{id}_A$. Δηλαδή

ένα αριστερό ουδέτερο είναι ίσο με την id_A . Τα δύο τρίγωνα δείχνουν πώς η αντιστροφή των βελών μετατρέπει τη μία συνθήκη στην άλλη.



Στο αριστερό τρίγωνο το e βρίσκεται πριν από το f , στο δεξιό μετά από το g .

Ο ισχυρισμός αυτός δεν είναι η Άσκηση 2.10(ii) αλλά το κατοπτρικό της. Η Άσκηση 2.10(ii) αφορά το δεξιό ουδέτερο. Ο δυϊκός ισχυρισμός αποδεικνύεται με το ίδιο επιχείρημα. Θέτουμε $g = \text{id}_A$ και παίρνουμε

$$e = e \circ \text{id}_A = \text{id}_A.$$

Η Άσκηση 2.10(iii) λέει κάτι διαφορετικό, ότι ένα δεξιό ουδέτερο είναι αναγκαστικά και αριστερό. Η δυϊκότητα μάς δίνει λοιπόν το αποτέλεσμα για το αριστερό ουδέτερο χωρίς νέα απόδειξη.