

Πρόλογος στις λύσεις των ασκήσεων

*Πώς διαβάζουμε, πώς σκεφτόμαστε και πώς λύνουμε
ασκήσεις στη Θεωρία Κατηγοριών*

Πώς χρησιμοποιούμε αυτό το αρχείο

Το αρχείο αυτό είναι ένα εργαλείο αναφοράς για τον φοιτητή που λύνει ασκήσεις κατηγορικής σκέψης. Πριν περάσουμε στις λύσεις, ας συγκεντρώσουμε σε λίγες σελίδες τον τρόπο με τον οποίο τις προσεγγίζουμε.

Η αλλαγή οπτικής σε μία πρόταση

Αντί να ρωτάμε «τι περιέχει ένα αντικείμενο», εδώ ρωτάμε «πώς συνδέεται με τα υπόλοιπα». Δεν εστιάζουμε στα στοιχεία, αλλά στην ύπαρξη και στη μοναδικότητα μορφισμών.

Πέντε ερωτήματα πριν από κάθε άσκηση

Πριν ξεκινήσουμε μια άσκηση, ξεκαθαρίζουμε πέντε πράγματα.

- 1. Σε ποιον κόσμο βρισκόμαστε.** Εξετάζουμε αν δουλεύουμε σε μια συγκεκριμένη κατηγορία, όπως η **Set**, η **Grp**, η **Mat_ℝ** ή ένα poset, ή σε μια αυθαίρετη κατηγορία $\mathcal{C}$.
- 2. Ποια είναι τα δεδομένα μας.** Καταγράφουμε ένα προς ένα τα αντικείμενα, τους μορφισμούς, τα Hom-σύνολα και, όπου υπάρχουν, τους πίνακες της πράξης.
- 3. Τι ακριβώς ζητείται.** Διακρίνουμε αν η άσκηση ζητά επαλήθευση, εύρεση, αντιπαράδειγμα ή αναδιατύπωση.
- 4. Ποιοι νόμοι εμπλέκονται.** Εντοπίζουμε αν θα χρειαστούμε την προσεταιριστικότητα, τον νόμο της ταυτοτικής, τον ορισμό του αρχικού ή του τελικού αντικειμένου ή τη δυϊκότητα.

5. Τι θα χαλούσε αν αλλάζαμε μία υπόθεση. Κάθε υπόθεση βρίσκεται εκεί για κάποιον λόγο, και αξίζει να γνωρίζουμε ακριβώς ποιον.

Τα τέσσερα είδη ασκήσεων και οι στρατηγικές τους

Οι ασκήσεις χωρίζονται σε τέσσερα είδη. Για καθένα υπάρχει μια στρατηγική που μας βοηθά να ξεκινήσουμε.

Είδος	Ενδεικτικές ασκήσεις	Στρατηγική
A. Υπολογισμός	2.1, 3.2, 5.9, 9.1, 10.14	Φτιάχνουμε πίνακα με τα Hom-σύνολα και εξαντλούμε τις περιπτώσεις.
B. Αναγνώριση	2.3, 3.5, 8.4, 11.11	Φτιάχνουμε πίνακα αντιστοιχιών ανάμεσα στην αλγεβρική και στην κατηγορική γλώσσα.
Γ. Δομική απόδειξη	1.14, 3.16, 8.6, 10.9	Σχεδιάζουμε πρώτα το διάγραμμα. Η μοναδικότητα ενός μορφισμού μάς δίνει ισότητες.
Δ. Αντιπαράδειγμα	1.12, 3.10(ii), 3.14(iv), 5.21, 10.16	Ξεκινάμε από ακραίες περιπτώσεις, όπως ένα μονοειδές, μια διακριτή κατηγορία ή η $\mathbb{Z}_2$.

Τέσσερα βασικά εργαλεία

- Μέτρημα μορφισμών.** Το επιχείρημα έχει πάντα την ίδια μορφή. Υπάρχει ακριβώς ένας μορφισμός $X \rightarrow Y$. Ο f είναι τέτοιος μορφισμός, το ίδιο και ο g , άρα $f = g$. Πρότυπο αυτού του επιχειρήματος είναι η μοναδικότητα του αρχικού και του τελικού αντικειμένου (Άσκηση 3.16).
- Αντιστροφή βελών (δυσικότητα).** Αν αποδείξουμε κάτι για την $\mathcal{C}$, το δυϊκό αποτέλεσμα για την $\mathcal{C}^{\text{op}}$ προκύπτει αυτόματα, αν αντιστρέψουμε όλα τα βέλη. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις βασικές αντιστοιχίες.

αρχικό	$\leftrightarrow$	τελικό
πηγή	$\leftrightarrow$	στόχος
$f \circ g$	$\leftrightarrow$	$g^{\text{op}} \circ f^{\text{op}}$

3. **Αντιμεταθετικά διαγράμματα.** Κάθε τρίγωνο που «κλείνει» εκφράζει μια ισότητα μορφισμών. Σχεδιάζουμε το διάγραμμα πριν γράψουμε οτιδήποτε και σημειώνουμε με «! » τους μοναδικούς μορφισμούς.
4. **Μετάφραση μεταξύ κόσμων.** Η ίδια κατηγορική έννοια παίρνει διαφορετική μορφή σε κάθε κόσμο, όπως δείχνει ο πίνακας.

	Set	Grp	poset
ισομορφισμός	αμφίρριψη	ισομορφισμός ομάδων	ισότητα
αρχικό	$\emptyset$	$\{e\}$	ελάχιστο στοιχείο
τελικό	$\{\star\}$	$\{e\}$	μέγιστο στοιχείο

Στα posets το αρχικό και το τελικό αντικείμενο υπάρχουν μόνο όταν υπάρχει ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο αντίστοιχα.

Συνήθη λάθη μετάφρασης

- Σε ένα poset ο ισομορφισμός σημαίνει *ισότητα* και όχι απλώς ότι τα δύο αντικείμενα «μοιάζουν».
- Στο μονοειδές το «αντιστρέψιμο στοιχείο» δεν είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση. Ο κατηγορικός ορισμός του ισομορφισμού είναι ο ίδιος, αλλά η ερμηνεία του διαφέρει, αφού εδώ αφορά στοιχεία μιας πράξης και όχι απεικονίσεις μεταξύ συνόλων.
- Ένας μορφισμός στη $\mathbf{Mat}_{\mathbb{F}}$ είναι μήτρα και όχι συνάρτηση μεταξύ αριθμών, και η σύνθεση είναι ο πολλαπλασιασμός των μητρώων.

Τρία επίπεδα κατανόησης

Μετά από κάθε λύση ελέγχουμε σε ποιο επίπεδο έχουμε κατανοήσει την άσκηση.

- **Επίπεδο 1, τεχνικό.** Μπορούμε να λύσουμε ξανά την άσκηση χωρίς βοήθεια.
- **Επίπεδο 2, δομικό.** Ξέρουμε πού χρησιμοποιήθηκε κάθε υπόθεση και τι θα χαλούσε χωρίς αυτήν.
- **Επίπεδο 3, εννοιολογικό.** Καταλαβαίνουμε γιατί το αποτέλεσμα έχει ενδιαφέρον και πού οδηγεί. Για παράδειγμα, η ιδέα «στοιχεία ως μορφισμοί» προετοιμάζει το Λήμμα Yoneda.

Πώς χρησιμοποιούμε τις λύσεις

1. Προσπαθούμε πρώτα μόνοι μας, για τουλάχιστον 15 λεπτά.
2. Συγκρίνουμε τη δομή και όχι τις λέξεις. Μια διαφορετική διατύπωση με το ίδιο επιχείρημα είναι σωστή λύση.
3. Εντοπίζουμε το κρίσιμο βήμα, δηλαδή το σημείο όπου χρησιμοποιείται η υπόθεση.
4. Αλλάζουμε νοερά μία υπόθεση και παρατηρούμε τι αλλάζει. Για παράδειγμα, αντικαθιστούμε το poset με προ-διάταξη ή κρατάμε το αρχικό αντικείμενο χωρίς τη μοναδικότητα.

Προειδοποίηση. Η Θεωρία Κατηγοριών δίνει την ψευδαίσθηση της ευκολίας, με τους σύντομους ορισμούς και τα κομψά διαγράμματά της. Η δυσκολία βρίσκεται στο να κατανοήσουμε γιατί κάθε ορισμός παίρνει τη συγκεκριμένη μορφή και γιατί κάθε υπόθεση είναι απαραίτητη. Όταν μια απόδειξη τριών γραμμών μάς φαίνεται εύκολη, ας ελέγξουμε αν μπορούμε να εξηγήσουμε σε κάποιον άλλον γιατί είναι σωστή και πώς λειτουργεί.

Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 1

Άσκηση 1.1 — Σύνθεση σε τέσσερις κόσμους

- i. Ναι, η $g \circ f$ είναι συνάρτηση. Αν $a \in A$, τότε $f(a) \in B$ και $g(f(a)) \in C$, οπότε ο τύπος $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ ορίζει συνάρτηση $A \rightarrow C$.
- ii. Ναι, η $g \circ f$ είναι ομομορφισμός. Για κάθε $a, b \in A$ έχουμε

$$(g \circ f)(a \cdot b) \stackrel{f \text{ ομομ.}}{=} g(f(a) * f(b)) \stackrel{g \text{ ομομ.}}{=} g(f(a)) \star g(f(b)) = (g \circ f)(a) \star (g \circ f)(b).$$

iii. Ναι, η $g \circ f$ είναι γραμμική. Για κάθε $u, w \in V$ και $m, n \in \mathbb{F}$ έχουμε

$$\begin{aligned}(g \circ f)(mu + nw) &= g(mf(u) + nf(w)) \\ &= mg(f(u)) + ng(f(w)) = m(g \circ f)(u) + n(g \circ f)(w).\end{aligned}$$

Στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη γραμμικότητα της f και στη δεύτερη τη γραμμικότητα της g .

iv. Ναι, η $g \circ f$ είναι συνεχής. Για κάθε ανοικτό $W \subseteq Z$ ισχύει $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$. Το $g^{-1}(W)$ είναι ανοικτό, επειδή η g είναι συνεχής, και επομένως το $f^{-1}(g^{-1}(W))$ είναι ανοικτό, επειδή η f είναι συνεχής.

Το κοινό μοτίβο και στους τέσσερις κόσμους είναι ότι η σύνθεση δύο απεικονίσεων που διατηρούν τη δομή διατηρεί κι αυτή τη δομή.

Άσκηση 1.2 — Σύνθεση ομομορφισμών βήμα προς βήμα

Έστω $\phi : (A, \cdot) \rightarrow (B, *)$ και $\psi : (B, *) \rightarrow (C, \star)$ ομομορφισμοί. Για κάθε $a, b \in A$ έχουμε

$$(\psi \circ \phi)(a \cdot b) \stackrel{\phi \text{ ομομ.}}{=} \psi(\phi(a) * \phi(b)) \stackrel{\psi \text{ ομομ.}}{=} \psi(\phi(a)) \star \psi(\phi(b)) = (\psi \circ \phi)(a) \star (\psi \circ \phi)(b).$$

Η συνθήκη του ομομορφισμού χρησιμοποιήθηκε δύο φορές, πρώτα για τη ϕ στην πρώτη ισότητα και έπειτα για τη ψ στη δεύτερη. $\square$

Άσκηση 1.3 — Ομομορφισμοί στο $(\mathbb{Z}, +)$

i. Ναι, η f είναι ομομορφισμός. Για κάθε $m, n \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$f(m + n) = 3(m + n) = 3m + 3n = f(m) + f(n).$$

ii. Όχι, η g δεν είναι ομομορφισμός. Ένα αντιπαράδειγμα δίνουν οι τιμές $m = n = 0$, αφού $g(0 + 0) = g(0) = 5$, ενώ $g(0) + g(0) = 10$. Ομοίως $g(1 + 1) = g(2) = 7$, ενώ $g(1) + g(1) = 12$. Μάλιστα η συνθήκη $g(m + n) = g(m) + g(n)$ αποτυγχάνει για κάθε ζεύγος m, n , εξαιτίας του σταθερού όρου 5.

iii. Ναι, η h είναι ομομορφισμός. Για κάθε $m, n \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$h(m + n) = -(m + n) = (-m) + (-n) = h(m) + h(n).$$

Άσκηση 1.4 — Γραμμικές απεικονίσεις στο $\mathbb{R}^2$

- i. Ναι, η T είναι γραμμική. Για κάθε $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} T(\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2)) &= T(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) \\ &= (\lambda x_1 + \mu x_2 + \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda x_1 + \mu x_2 - \lambda y_1 - \mu y_2) \\ &= \lambda(x_1 + y_1, x_1 - y_1) + \mu(x_2 + y_2, x_2 - y_2) \\ &= \lambda T(x_1, y_1) + \mu T(x_2, y_2). \end{aligned}$$

- ii. Όχι, η S δεν είναι γραμμική. Για αντιπαράδειγμα ας πάρουμε το διάνυσμα $(1, 0)$ και τον αριθμό 2. Έχουμε $S(2 \cdot (1, 0)) = S(2, 0) = (4, 0)$, ενώ $2 \cdot S(1, 0) = 2 \cdot (1, 0) = (2, 0) \neq (4, 0)$. Η συνθήκη της ομογένειας αποτυγχάνει εξαιτίας του όρου x^2 .

- iii. Ναι, η R_θ είναι γραμμική. Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2), \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Το διάνυσμα $\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}$ έχει συντεταγμένες $(\lambda u_1 + \mu v_1, \lambda u_2 + \mu v_2)$. Η πρώτη συντεταγμένη του $R_\theta(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v})$ είναι

$$\begin{aligned} (\lambda u_1 + \mu v_1) \cos \theta - (\lambda u_2 + \mu v_2) \sin \theta \\ = \lambda(u_1 \cos \theta - u_2 \sin \theta) + \mu(v_1 \cos \theta - v_2 \sin \theta), \end{aligned}$$

και η δεύτερη είναι

$$\begin{aligned} (\lambda u_1 + \mu v_1) \sin \theta + (\lambda u_2 + \mu v_2) \cos \theta \\ = \lambda(u_1 \sin \theta + u_2 \cos \theta) + \mu(v_1 \sin \theta + v_2 \cos \theta). \end{aligned}$$

Οι παραστάσεις στα δεξιά είναι οι συντεταγμένες του $\lambda R_\theta(\mathbf{u}) + \mu R_\theta(\mathbf{v})$, άρα

$$R_\theta(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}) = \lambda R_\theta(\mathbf{u}) + \mu R_\theta(\mathbf{v}).$$

Άσκηση 1.5 — Συνέχεια στο $\mathbb{R}$

- i. Ναι, η συνάρτηση είναι συνεχής. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta = \min\{1, \varepsilon/(2|x_0| + 1)\}$. Αν $|x - x_0| < \delta$, τότε $|x - x_0| < 1$, οπότε $|x + x_0| \leq |x - x_0| + 2|x_0| < 2|x_0| + 1$. Επομένως

$$|x^2 - x_0^2| = |x + x_0| |x - x_0| < (2|x_0| + 1) \delta \leq \varepsilon.$$

- ii. Όχι, η g δεν είναι συνεχής. Στο $x = 0$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$. Επειδή τα δύο πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, η g δεν είναι συνεχής στο 0.
- iii. Η αντίστροφη είναι η $h^{-1}(x) = x/2$, που είναι συνεχής, αφού είναι γραμμική συνάρτηση με συντελεστή $1/2$.
- iv. Ναι, η h είναι ισομορφισμός στην **Top**. Η h και η h^{-1} είναι συνεχείς και ισχύει $h^{-1} \circ h = \text{id}_{\mathbb{R}} = h \circ h^{-1}$.

Άσκηση 1.6 — Μονότονες απεικονίσεις

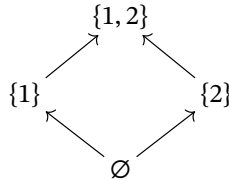
- i. Ένα παράδειγμα είναι η $f(X) = |X|$, δηλαδή το πλήθος των στοιχείων του X . Αν $X \subseteq Y$, τότε $|X| \leq |Y|$, άρα η f είναι μονότονη. Ένα άλλο παράδειγμα είναι η απεικόνιση με $f(\emptyset) = 0$, $f(\{1\}) = f(\{2\}) = f(\{3\}) = 1$, $f(\{1, 2\}) = f(\{1, 3\}) = f(\{2, 3\}) = 2$ και $f(\{1, 2, 3\}) = 5$.
- ii. Όχι, δεν υπάρχει μονότονη $g: Q \rightarrow P$ που να είναι επί. Μια μονότονη $g: (\mathbb{N}, \leq) \rightarrow \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ στέλνει την αλυσίδα $0 \leq 1 \leq 2 \leq \dots$ σε μια αύξουσα ακολουθία υποσυνόλων $g(0) \subseteq g(1) \subseteq g(2) \subseteq \dots$. Δύο οποιεσδήποτε τιμές της g είναι επομένως συγκρίσιμες ως προς τον εγκλεισμό, δηλαδή η εικόνα της g είναι αλυσίδα του $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$. Μια αλυσίδα σε αυτό το poset έχει το πολύ 4 στοιχεία, για παράδειγμα $\emptyset \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$, αφού σε κάθε γνήσιο εγκλεισμό το πλήθος των στοιχείων αυξάνεται τουλάχιστον κατά ένα. Άρα η g παίρνει το πολύ 4 διαφορετικές τιμές και δεν μπορεί να είναι επί στα 8 στοιχεία του P .

Άσκηση 1.7 — Αντιπαράδειγμα στα posets

- i. Ορίζουμε $f: P \rightarrow Q$ με $f(1) = b$ και $f(2) = a$. Τότε $1 \leq_P 2$, αλλά $f(1) = b \not\leq_Q a = f(2)$, άρα η f δεν είναι μονότονη.
- ii. Στην **Set** κάθε συνάρτηση είναι αποδεκτός μορφισμός, γιατί τα σύνολα δεν φέρουν επιπλέον δομή και μας ενδιαφέρουν μόνο τα στοιχεία τους. Στα posets η διάταξη είναι μέρος της δομής, και οι μορφισμοί πρέπει να τη διατηρούν. Εδώ βλέπουμε τη γενική αρχή της Θεωρίας Κατηγοριών, ότι οι μορφισμοί διατηρούν τη δομή των αντικειμένων.

Άσκηση 1.8 — Το poset $(\mathcal{P}(\{1, 2\}), \subseteq)$

- i. Στο διάγραμμα Hasse το $\emptyset$ βρίσκεται στο κάτω μέρος, τα $\{1\}$ και $\{2\}$ στο ενδιάμεσο επίπεδο και το $\{1, 2\}$ στην κορυφή. Οι ακμές είναι οι $\emptyset \rightarrow \{1\}$, $\emptyset \rightarrow \{2\}$, $\{1\} \rightarrow \{1, 2\}$ και $\{2\} \rightarrow \{1, 2\}$, και σχηματίζουν ένα διαμάντι.



- ii. Σε κάθε ζεύγος (X, Y) με $X \subseteq Y$ αντιστοιχεί ένας μορφισμός $X \rightarrow Y$. Τα ζεύγη αυτά είναι εννέα, τα

$$\begin{aligned} &(\emptyset, \emptyset), \quad (\emptyset, \{1\}), \quad (\emptyset, \{2\}), \quad (\emptyset, \{1, 2\}), \\ &(\{1\}, \{1\}), \quad (\{1\}, \{1, 2\}), \quad (\{2\}, \{2\}), \quad (\{2\}, \{1, 2\}), \\ &(\{1, 2\}, \{1, 2\}). \end{aligned}$$

- iii. Ναι. Για κάθε $X \in \mathcal{P}(\{1, 2\})$ ισχύει $X \subseteq X$, άρα υπάρχει μορφισμός $X \rightarrow X$. Αυτός είναι ο ταυτοτικός μορφισμός id_X . Η σύνθεσή του με οποιονδήποτε μορφισμό δίνει τον ίδιο μορφισμό, αφού σε ένα poset υπάρχει το πολύ ένας μορφισμός από ένα αντικείμενο σε ένα άλλο.
- iv. Η ζητούμενη σύνθεση είναι $\text{id}_{\{1, 2\}} \circ i_{\{1\}} = i_{\{1\}}$, όπου $i_{\{1\}} : \{1\} \hookrightarrow \{1, 2\}$ είναι η εμφύτευση.

Το poset αυτό εμπίπτει στο ίδιο σχήμα με τους κόσμους της §1.1 του βιβλίου, αφού έχει αντικείμενα, μορφισμούς, προσεταιριστική σύνθεση και ταυτοτικούς μορφισμούς.

Άσκηση 1.9 — Ιχνηλάτηση διαγραμμάτων

Δίνεται ότι $h \circ f = k \circ g$, όπου οι f, k είναι ισομορφισμοί. Συνθέτουμε και τα δύο μέλη με τον f^{-1} από δεξιά και παίρνουμε

$$h \circ f \circ f^{-1} = k \circ g \circ f^{-1}.$$

Επειδή $f \circ f^{-1} = \text{id}_A$, το αριστερό μέλος γίνεται $h \circ \text{id}_A = h$, άρα

$$h = k \circ g \circ f^{-1}. \quad \square$$

Άσκηση 1.10 — Προετοιμασία για τον ισομορφισμό

- i. Υπάρχουν δύο απεικονίσεις $i : A \rightarrow B$, η i_1 με $i_1(1) = x$ και η i_2 με $i_2(1) = y$.
Αντίθετα, υπάρχει μία μόνο απεικόνιση $p : B \rightarrow A$, η $p(x) = p(y) = 1$, επειδή $|A| = 1$ και κάθε στοιχείο του B πρέπει να απεικονιστεί στο μοναδικό στοιχείο του A .
- ii. Για κάθε i_j και τη μοναδική p έχουμε $(p \circ i_j)(1) = p(i_j(1)) = 1 = \text{id}_A(1)$. Άρα $p \circ i_j = \text{id}_A$ για $j = 1, 2$.
- iii. Όχι, καμία από τις $i_j \circ p$ δεν είναι η id_B . Έχουμε $(i_1 \circ p)(x) = i_1(1) = x$, αλλά $(i_1 \circ p)(y) = i_1(1) = x \neq y$, και το ίδιο συμβαίνει με την i_2 . Βλέπουμε ότι η πληροφορία χάνεται όταν περνάμε από ένα μεγαλύτερο σύνολο σε ένα μικρότερο και επιστρέφουμε. Η p δεν είναι έρριψη, και δεν μπορούμε να ανακτήσουμε ποιο από τα x, y είχαμε αρχικά.

Άσκηση 1.11 — Ισομορφισμοί posets

- i. Το P έχει δύο κόμβους a, b και μία ακμή $a \rightarrow b$, δηλαδή είναι αλυσίδα. Το Q έχει δύο κόμβους x, y χωρίς ακμή, δηλαδή έχει τη διακριτή διάταξη.
- ii. Υπάρχει αμφίρριψη $f : P \rightarrow Q$, για παράδειγμα η $f(a) = x, f(b) = y$, αλλά δεν είναι μονότονη, αφού $a < b$ ενώ τα x, y δεν είναι συγκρίσιμα.
- iii. Υπάρχει αμφίρριψη $g : Q \rightarrow P$, για παράδειγμα η $g(x) = a, g(y) = b$. Η g είναι μονότονη, γιατί στη διακριτή διάταξη οι μόνες σχέσεις είναι οι $x \leq x$ και $y \leq y$, και αυτές διατηρούνται αυτόματα. Η αντίστροφη της όμως είναι η f του (ii), που δεν είναι μονότονη. Άρα η g είναι μονότονη αμφίρριψη χωρίς να είναι ισομορφισμός posets.
- iv. Όχι, τα P και Q δεν είναι ισόμορφα. Αν ήταν, θα υπήρχε μονότονη αμφίρριψη $f : P \rightarrow Q$ με μονότονη αντίστροφη. Από το $a < b$ θα παίρναμε $f(a) \leq f(b)$ με $f(a) \neq f(b)$, δηλαδή δύο διαφορετικά συγκρίσιμα στοιχεία του Q . Στο Q όμως τέτοια στοιχεία δεν υπάρχουν.
- v. Ένα παράδειγμα είναι το $P' = \{1, 2\}$ με $1 < 2$ (αλυσίδα) και το $Q' = \{1, 2\}$ με τα $1, 2$ μη συγκρίσιμα (διακριτή διάταξη). Τα δύο posets έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, αλλά δεν είναι ισόμορφα.

Στα posets ο ισομορφισμός είναι αυστηρότερος από ό,τι στα σύνολα. Δύο posets με το ίδιο πλήθος στοιχείων μπορεί να μην είναι ισόμορφα, αν οι διατάξεις τους διαφέρουν.

Άσκηση 1.12 — Ο ορισμός του ισομορφισμού απαιτεί και τις δύο συνθέσεις

- i. Έστω $A = \{1\}$ και $B = \{a, b\}$. Ορίζουμε $f(1) = a$ και $g(a) = g(b) = 1$. Τότε $(g \circ f)(1) = g(a) = 1 = \text{id}_A(1)$, άρα $g \circ f = \text{id}_A$. Όμως $(f \circ g)(b) = f(1) = a \neq b$, άρα $f \circ g \neq \text{id}_B$.
- ii. Ένα παράδειγμα με ομομορφισμούς ομάδων μάς δίνει η ομάδα $G = H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}$, δηλαδή το ευθύ άθροισμα άπειρων αντιγράφων του $\mathbb{Z}$. Ορίζουμε

$$\begin{aligned}\phi(a_1, a_2, a_3, \dots) &= (0, a_1, a_2, a_3, \dots) \quad (\text{ολίσθηση δεξιά}), \\ \psi(a_1, a_2, a_3, \dots) &= (a_2, a_3, a_4, \dots) \quad (\text{ολίσθηση αριστερά}).\end{aligned}$$

Και οι δύο είναι ομομορφισμοί ομάδων. Για τη σύνθεση $\psi \circ \phi$ έχουμε

$$(\psi \circ \phi)(a_1, a_2, \dots) = \psi(0, a_1, a_2, \dots) = (a_1, a_2, \dots),$$

άρα $\psi \circ \phi = \text{id}_G$. Για τη σύνθεση $\phi \circ \psi$ όμως

$$(\phi \circ \psi)(1, 0, 0, \dots) = \phi(0, 0, \dots) = (0, 0, \dots) \neq (1, 0, 0, \dots),$$

άρα $\phi \circ \psi \neq \text{id}_H$.

Χρειαζόμαστε και τις δύο συνθέσεις, ώστε οι δομές να είναι πραγματικά «ίδιες». Η $g \circ f = \text{id}_A$ συνεπάγεται ότι η f είναι έρριψη, η $f \circ g = \text{id}_B$ ότι είναι επίρριψη, και οι δύο μαζί ότι η f είναι αμφίρριψη που διατηρεί τη δομή, με αντίστροφη που επίσης διατηρεί τη δομή.

Άσκηση 1.13 — Ο ομομορφισμός $\phi(n) = 2n$

- i. Αν $\phi(m) = \phi(n)$, τότε $2m = 2n$, άρα $m = n$. Η ϕ είναι λοιπόν έρριψη, δηλαδή μονομορφισμός.
- ii. Όχι, η ϕ δεν είναι επίρριψη. Δεν υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ με $\phi(n) = 2n = 1$, και η εικόνα της ϕ είναι το $2\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$.
- iii. Όχι, τέτοιος ομομορφισμός δεν υπάρχει. Αν υπήρχε ομομορφισμός $\psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ με $\psi \circ \phi = \text{id}_{\mathbb{Z}}$, τότε $\psi(2 \cdot 1) = 1$, δηλαδή $2\psi(1) = 1$, οπότε $\psi(1) = 1/2 \notin \mathbb{Z}$, πράγμα αδύνατο.
- iv. Όχι, ούτε αυτός ο ομομορφισμός υπάρχει. Αν $\phi \circ \psi = \text{id}_{\mathbb{Z}}$, τότε $\phi(\psi(1)) = 2\psi(1) = 1$, οπότε $\psi(1) = 1/2 \notin \mathbb{Z}$, πράγμα αδύνατο.

- v. Αυτό δεν ισχύει πάντα. Ένας ομομορφισμός που είναι έρριψη είναι ισομορφισμός μόνο αν είναι και επίρριψη. Η ϕ είναι έρριψη αλλά όχι επίρριψη $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, άρα δεν είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 1.14 — Μοναδικότητα αντιστρόφου

Έστω ότι οι $g_1, g_2 : B \rightarrow A$ είναι δύο αντίστροφοι του f . Τότε

$$g_1 = g_1 \circ \text{id}_B = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = \text{id}_A \circ g_2 = g_2.$$

Άρα $g_1 = g_2$, δηλαδή ο αντίστροφος είναι μοναδικός. □

Άσκηση 1.15 — Ισομορφισμός στη Set

- i. Μια τέτοια απεικόνιση είναι η $f(1) = a, f(2) = b, f(3) = c$, όπως και κάθε άλλη αμφίρριψη από το A στο B .
- ii. Η αντίστροφη είναι η $g(a) = 1, g(b) = 2, g(c) = 3$.
- iii. Έχουμε $(g \circ f)(1) = g(a) = 1, (g \circ f)(2) = g(b) = 2$ και $(g \circ f)(3) = g(c) = 3$, άρα $g \circ f = \text{id}_A$. Ομοίως $(f \circ g)(a) = f(1) = a$ κ.λπ., άρα $f \circ g = \text{id}_B$.
- iv. Όχι, $A \neq B$, αφού τα στοιχεία τους διαφέρουν, για παράδειγμα $1 \neq a$.
- v. Η ισότητα ($=$) και ο ισομορφισμός ($\cong$) είναι διαφορετικές έννοιες. Η ισότητα απαιτεί τα ίδια ακριβώς στοιχεία, ενώ ο ισομορφισμός εκφράζει δομική ισοδυναμία. Δύο σύνολα είναι ισόμορφα όταν υπάρχει αμφίρριψη μεταξύ τους, δηλαδή όταν έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, χωρίς να είναι κατ' ανάγκην ίσα.

Άσκηση 1.16 — Σύγκριση των πέντε κόσμων

- i. Σε όλους τους κόσμους η σύνθεση δύο απεικονίσεων που διατηρούν τη δομή διατηρεί επίσης τη δομή. Δεν υπάρχει κόσμος όπου αυτό αποτυγχάνει.
- ii. Σε όλους τους κόσμους η id_A είναι συνάρτηση, ομομορφισμός, γραμμική, συνεχής και μονότονη. Για τη μονοτονία, για παράδειγμα, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι από το $x \leq y$ έπεται $\text{id}(x) = x \leq y = \text{id}(y)$.
- iii. Στα σύνολα η απάντηση είναι καταφατική, αφού κάθε αμφίρριψη έχει αντίστροφη συνάρτηση. Στις ομάδες η απάντηση είναι επίσης καταφατική, γιατί κάθε αμφιριπτικός ομομορφισμός έχει αντίστροφο ομομορφισμό. Πράγματι,

αν $\varphi: G \rightarrow H$ είναι αμφίρριπτικός ομομορφισμός και $h_1, h_2 \in H$, θέτουμε $a = \varphi^{-1}(h_1)$ και $b = \varphi^{-1}(h_2)$. Τότε $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = h_1 h_2$, άρα

$$\varphi^{-1}(h_1 h_2) = ab = \varphi^{-1}(h_1) \varphi^{-1}(h_2).$$

Η αντίστροφη κληρονομεί λοιπόν αυτόματα τη δομή. Στους διανυσματικούς χώρους ισχύει το ίδιο, με ανάλογη απόδειξη για τη γραμμικότητα.

Στα posets όμως το πρότυπο αυτό σπάει. Στην Άσκηση 1.11 είδαμε μια μονότονη αμφίρριψη της οποίας η αντίστροφη δεν είναι μονότονη. Το ίδιο συμβαίνει και στην Τοπολογία, όπου μια συνεχής αμφίρριψη δεν έχει πάντα συνεχή αντίστροφη. Το κλασικό αντιπαράδειγμα είναι η απεικόνιση $[0, 2\pi) \rightarrow S^1$ με $t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Είναι συνεχής αμφίρριψη, αλλά η αντίστροφή της δεν είναι συνεχής στο σημείο $(1, 0)$, αφού σημεία του κύκλου κοντά σε αυτό αντιστοιχούν άλλοτε σε τιμές κοντά στο 0 και άλλοτε σε τιμές κοντά στο 2π .

Βλέπουμε καθαρά ότι η δομή της διάταξης και η δομή της τοπολογίας είναι πιο εύθραυστες από τη δομή της ομάδας ή του διανυσματικού χώρου. Η αμφίρριψη από μόνη της δεν αρκεί. Στην Τοπολογία, για να έχει μια συνεχής αμφίρριψη συνεχή αντίστροφη, πρέπει επιπλέον να είναι ανοικτή απεικόνιση, δηλαδή να είναι ομοιομορφισμός.

- iv. Το κοινό μοτίβο είναι ότι κάθε κόσμος αποτελείται από αντικείμενα με κάποια δομή και από μορφισμούς που τη διατηρούν, με προσεταιριστική σύνθεση και ταυτοτικούς μορφισμούς. Με άλλα λόγια, καθένας από αυτούς αποτελεί κατηγορία.

Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 2

Άσκηση 2.1 — Προσεταιριστικότητα στην πράξη

- i. Οι συνθέσεις υπολογίζονται άμεσα.

$$\begin{aligned} (g \circ f)(1) &= g(f(1)) = g(a) = 1, & (g \circ f)(2) &= g(f(2)) = g(b) = 0, \\ (h \circ g)(a) &= h(g(a)) = h(1) = \beta, & (h \circ g)(b) &= h(g(b)) = h(0) = \alpha. \end{aligned}$$

Συγκεντρώνουμε όλες τις τιμές στον παρακάτω πίνακα.

x	$f(x)$	$(g \circ f)(x)$	$h((g \circ f)(x))$	$((h \circ g) \circ f)(x)$
1	a	1	β	β
2	b	0	α	α

- ii. Από τον πίνακα βλέπουμε ότι $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, αφού και οι δύο συναρτήσεις στέλνουν το 1 στο β και το 2 στο α .

Άσκηση 2.2 — Μονοπάτια στην πράξη

- i. Από το A στο C υπάρχουν δύο μονοπάτια, το $A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C$ και το $A \xrightarrow{d} D \xrightarrow{e} B \xrightarrow{b} C$.
- ii. Στη σημειογραφία με $*$ το πρώτο γράφεται $b * a$ και το δεύτερο $b * e * d$.
- iii. Και τα δύο μέλη της ισότητας $b * (e * d) = (b * e) * d$ είναι το μονοπάτι $A \xrightarrow{d} D \xrightarrow{e} B \xrightarrow{b} C$, απλώς ομαδοποιημένο διαφορετικά. Η σύνθεση μονοπατιών είναι προσεταιριστική, γιατί το αποτέλεσμα, δηλαδή η ακολουθία των ακμών, δεν αλλάζει με την ομαδοποίηση.
- iv. Το κενό μονοπάτι ε_A αντιστοιχεί στην παραμονή στην κορυφή A χωρίς να διασχίσουμε καμία ακμή. Το $a * \varepsilon_A$ είναι η συνένωση του ε_A , που έχει μήκος 0, με το a , που έχει μήκος 1, και δίνει το ίδιο μονοπάτι a .
- v. Αν $\ell * \ell = \ell$, τα μονοπάτια $\ell * \ell$, $\ell * \ell * \ell$ κ.ο.κ. ταυτίζονται όλα με το ℓ . Η συνθήκη $p * p = p$ θυμίζει την ταυτοδυναμία (idempotency), για παράδειγμα την ορθογώνια προβολή της Γραμμικής Άλγεβρας, όπου $P^2 = P$.

Άσκηση 2.3 — Βρόχοι

- i. Τα πρώτα τέσσερα μονοπάτια είναι το κενό ε_A με μήκος 0, το e με μήκος 1, το $e * e$ με μήκος 2 και το $e * e * e$ με μήκος 3.
- ii. Αν το p έχει μήκος m και το q έχει μήκος n , τότε το $q * p$ έχει μήκος $m + n$.
- iii. Η δομή αυτή θυμίζει τους φυσικούς αριθμούς με την πρόσθεση, $(\mathbb{N}, +)$. Τα μήκη των μονοπατιών παίζουν τον ρόλο των στοιχείων, η σύνθεση αντιστοιχεί στην πρόσθεση των μηκών και το κενό μονοπάτι στο μηδέν.

Άσκηση 2.4 — Παράλληλες ακμές σε γράφημα

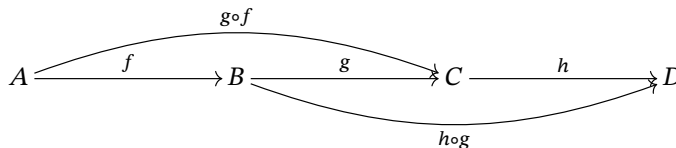
- Υπάρχουν τρία μονοπάτια μήκους 1 από το A στο B , οι ακμές f , g και h .
- Μετά από καθεμία από τις τρεις ακμές f , g , h από το A στο B μπορεί να ακολουθήσει η $k : B \rightarrow A$. Άρα υπάρχουν $3 \times 1 = 3$ μονοπάτια μήκους 2 από το A στο A , τα $k * f$, $k * g$ και $k * h$.
- Αν $f = g$, τα διαφορετικά μονοπάτια μήκους 1 είναι το f , που ταυτίζεται με το g , και το h , δηλαδή δύο συνολικά.
- (Προαιρετικό.) Αν $k * f = k * g = k * h$, τότε τα τρία μονοπάτια $A \rightarrow B \rightarrow A$ ταυτίζονται, και μένει ένα μόνο μονοπάτι μήκους 2 από το A στο A .

Άσκηση 2.5 — Ταυτοδύναμος ενδομορφισμός

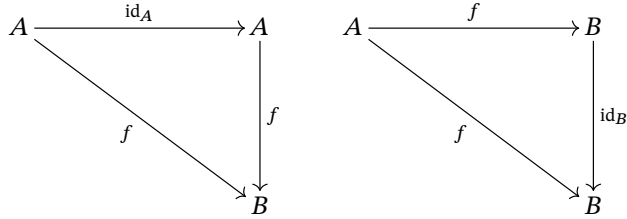
- Θέτουμε $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 3$. Τότε $(f \circ f)(1) = f(1) = 1$, $(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(1) = 1$ και $(f \circ f)(3) = f(3) = 3$, άρα $f \circ f = f$. Η f συμπτύσσει το $\{1, 2\}$ στο 1 και αφήνει το 3 σταθερό. Με άλλα λόγια, είναι μια συστολή (retraction) του $\{1, 2, 3\}$ στο υποσύνολο $\{1, 3\}$.
- Η $P(x, y) = (x, 0)$, δηλαδή η προβολή στον πρώτο άξονα, είναι ταυτοδύναμη, αφού $P(P(x, y)) = P(x, 0) = (x, 0) = P(x, y)$. Πρόκειται για την ορθογώνια προβολή, την κλασική ταυτοδύναμη γραμμική απεικόνιση.
- Γενικά αυτό δεν ισχύει. Το $e * e$ είναι μονοπάτι μήκους 2, ενώ το e έχει μήκος 1, άρα $e * e \neq e$, εκτός αν επιβάλουμε τη σχέση $e * e = e$ ως πρόσθετη συνθήκη στο γράφημα.

Άσκηση 2.6 — Σχεδίαση

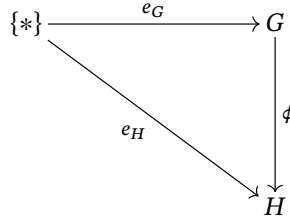
- Το διάγραμμα για την ισότητα $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ είναι το εξής.



ii. Τα δύο τρίγωνα της ταυτοτικής είναι τα παρακάτω.



iii. Θεωρούμε το μονοσύνολο $\{*\}$ και τις απεικονίσεις $e_G : \{*\} \rightarrow G$, που επιλέγει το ουδέτερο στοιχείο της G , και $e_H : \{*\} \rightarrow H$, που επιλέγει το ουδέτερο στοιχείο της H . Η συνθήκη $\phi(e_G) = e_H$ γράφεται τότε ως αντιμεταθετικό τρίγωνο.



Άσκηση 2.7 — Μονοπάτια σε τετράγωνο

- Από το A στο C υπάρχουν δύο μονοπάτια, το $g * f$ μέσω του B και το $k * h$ μέσω του D .
- Το διάγραμμα αντιμετατίθεται αν και μόνο αν $g \circ f = k \circ h$, δηλαδή αν τα δύο μονοπάτια δίνουν την ίδια σύνθεση.
- Αν το διάγραμμα αντιμετατίθεται, οι δύο συνθέσεις ταυτίζονται, οπότε από το A στο C προκύπτει ένας μόνο μορφισμός, όποιο μονοπάτι και αν ακολουθήσουμε.

Άσκηση 2.8 — Απλοποίηση

Δίνεται ότι $g \circ f = \text{id}_A$.

i. Έχουμε

$$g \circ f \circ g = (g \circ f) \circ g = \text{id}_A \circ g = g. \quad \square$$

ii. Έχουμε

$$f \circ g \circ f = f \circ (g \circ f) = f \circ \text{id}_A = f. \quad \square$$

Άσκηση 2.9 — Μοναδικότητα ταυτοτικής

Εξετάζουμε τη σύνθεση $e \circ e'$. Έχουμε

$$e \stackrel{(1)}{=} e \circ e' \stackrel{(2)}{=} e'.$$

Η ισότητα (1) ισχύει γιατί ο e' ικανοποιεί $f \circ e' = f$ για κάθε f , οπότε $e \circ e' = e$. Η ισότητα (2) ισχύει γιατί ο e ικανοποιεί $e \circ g = g$ για κάθε g , οπότε $e \circ e' = e'$. Άρα $e = e'$. $\square$

Άσκηση 2.10 — Ταυτοτική από τη μία πλευρά

Έστω $e : A \rightarrow A$ με $f \circ e = f$ για κάθε f με πηγή A .

i. Εφαρμόζουμε την υπόθεση για $f = e$ και παίρνουμε

$$e \circ e = e. \quad \square$$

ii. Εφαρμόζουμε την υπόθεση για $f = \text{id}_A$ και παίρνουμε $\text{id}_A \circ e = \text{id}_A$. Επειδή $\text{id}_A \circ e = e$, συμπεραίνουμε ότι $e = \text{id}_A$. Τότε για κάθε $g : B \rightarrow A$ έχουμε

$$e \circ g = \text{id}_A \circ g = g. \quad \square$$

iii. Από το (ii) έπεται απευθείας ότι $e = \text{id}_A$. $\square$

Άσκηση 2.11 — Παραβίαση ταυτοτικής

- Ναι, η πρόσθεση είναι προσεταιριστική, αφού $(x + y) + z = x + (y + z)$ για κάθε $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$.
- Όχι, δεν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο. Αν υπήρχε $e \in \mathbb{Z}^+$ με $e + x = x$, θα είχαμε $e = 0$. Όμως $0 \notin \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- Χωρίς ουδέτερο στοιχείο δεν μπορούμε να ορίσουμε τον ισομορφισμό, γιατί η συνθήκη «η $g \circ f$ είναι ίση με το ουδέτερο» δεν έχει νόημα, όταν το ουδέτερο δεν υπάρχει στο σύστημα. Ακόμη και αν αντικαταστήσουμε το «ουδέτερο» με την «ταυτοτική», η απεικόνιση $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ με $f(x) = x + 1$ δεν έχει αντίστροφη στο $\mathbb{Z}^+$. Η εξίσωση $f(x) = 1$ δίνει $x = 0 \notin \mathbb{Z}^+$, δηλαδή η f δεν είναι επίρριψη.

Άσκηση 2.12 — Ταυτότητες και σχέσεις διάταξης

- i. Η *ανακλαστικότητα*, δηλαδή η $a \leq a$ για κάθε a , εγγυάται την ύπαρξη βέλους $a \rightarrow a$, δηλαδή της ταυτοτικής id_a .
- ii. Η *μεταβατικότητα* λέει ότι αν $a \leq b$ και $b \leq c$, τότε $a \leq c$. Αυτό σημαίνει ότι η σύνθεση $(b \rightarrow c) \circ (a \rightarrow b)$ ορίζεται και δίνει το βέλος $a \rightarrow c$.
- iii. Η *αντισυμμετρικότητα* λέει ότι αν $a \leq b$ και $b \leq a$, τότε $a = b$. Δεν αντιστοιχεί σε κανέναν από τους δύο νόμους, αφού δεν αφορά ούτε τη σύνθεση ούτε την ταυτοτική. Σε γλώσσα κατηγοριών σημαίνει ότι αν υπάρχουν βέλη $a \rightarrow b$ και $b \rightarrow a$, τότε $a = b$, δηλαδή δύο διαφορετικά αντικείμενα δεν είναι ποτέ ισόμορφα. Το ότι από το a στο b υπάρχει το πολύ ένα βέλος ισχύει σε κάθε προ-διάταξη και δεν οφείλεται στην αντισυμμετρικότητα.
- iv. Ας πάρουμε το $(\mathbb{N}, \leq)$ και τις σχέσεις $1 \leq 2 \leq 3$. Η σύνθεση $(2 \rightarrow 3) \circ (1 \rightarrow 2)$ δίνει το βέλος $1 \rightarrow 3$. Η σύνθεση αυτή δεν εκφράζεται ως $f(g(x))$ για κάποιες συναρτήσεις, αφού δεν υπάρχουν στοιχεία που μεταφέρονται. Υπάρχει μόνο το γεγονός $1 \leq 3$, που προκύπτει από τη μεταβατικότητα και όχι από κάποιον υπολογισμό.

Άσκηση 2.13 — Σύγκριση κόσμων

- i. Στους πέντε πρώτους κόσμους έχουμε

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h(g(f(a))) = ((h \circ g) \circ f)(a).$$

Η κοινή αλυσίδα είναι $a \mapsto f(a) \mapsto g(f(a)) \mapsto h(g(f(a)))$, και η ομαδοποίηση δεν αλλάζει τη σειρά εφαρμογής.

- ii. Στα γραφήματα η σύνθεση μονοπατιών ορίζεται ως συνένωση ακολουθιών ακμών. Οι ομαδοποιήσεις $(e_3 * e_2) * e_1$ και $e_3 * (e_2 * e_1)$ δίνουν την ίδια ακολουθία ακμών, άρα το ίδιο μονοπάτι, χωρίς να χρειαστούμε μια αλυσίδα της μορφής $f(g(x))$.
- iii. Η διαφορά αυτή δείχνει ότι η προσεταιριστικότητα δεν είναι ιδιότητα των συναρτήσεων. Είναι απαίτηση που επιβάλλουμε σε κάθε σύστημα σύνθεσης, ανεξάρτητα από τη φύση των βελών. Οι δύο νόμοι δεν αποδεικνύονται από κάποια βαθύτερη αρχή, αλλά τους απαιτούμε. Αυτός είναι ακριβώς ο λόγος που στο Κεφάλαιο 3 θα τους θέσουμε ως αξιώματα.