

Τα όρια

Από το γινόμενο, τον εξισωτή και το pullback στη γενική κατασκευή

Σημειώσεις που συνοδεύουν το βιβλίο «Εισαγωγή στη Θεωρία Κατηγοριών» των εκδόσεων ΔΙΑΥΛΟΣ.

Σεπτέμβριος 2026

Στις προηγούμενες σημειώσεις συναντήσαμε τρεις κατασκευές, το γινόμενο, τον εξισωτή και το pullback. Καθεμία ξεκινά από ένα μικρό σχήμα με αντικείμενα και βέλη, και ζητά ένα αντικείμενο που «καλύπτει» το σχήμα με καθολικό τρόπο. Εδώ δείχνουμε ότι οι τρεις κατασκευές είναι στην πραγματικότητα μία. Την ορίζουμε με ακρίβεια, περνώντας από το διάγραμμα στον κώνο και από τον κώνο στο όριο. Ξαναβρίσκουμε τα τρία παραδείγματα, εξετάζουμε δύο ακραίες περιπτώσεις, περιγράφουμε τα όρια στα σύνολα και στις ομάδες, και δείχνουμε στο τέλος ότι όλα τα πεπερασμένα όρια κατασκευάζονται από γινόμενα και εξισωτές.

Τι προϋποθέτουμε. Χρειαζόμαστε τις έννοιες της κατηγορίας και του συναρτητή, όπως τις παρουσιάζουμε στο βιβλίο μας «Εισαγωγή στη Θεωρία Κατηγοριών», στα κεφάλαια 3 και 5. Χρειαζόμαστε επίσης την καθολική ιδιότητα του γινομένου, του εξισωτή και του pullback, που τη βρίσκουμε στα κεφάλαια 8 και 9 του βιβλίου και στις σημειώσεις «Η καθολική ιδιότητα» και «Το pullback και η τομή συνόλων». Οι φυσικοί μετασχηματισμοί του κεφαλαίου 6 εμφανίζονται μόνο σε μία παρατήρηση. Τα όρια τα βρίσκουμε στο κεφάλαιο 10 του βιβλίου, και σε κάθε σημείο παραπέμπουμε στην αντίστοιχη ενότητα.

1 Διαγράμματα

Ας θυμηθούμε από ποιο σχήμα ξεκίνησε καθεμία από τις τρεις κατασκευές.

- Στο γινόμενο, το σχήμα αποτελείται από δύο αντικείμενα A και B και κανένα βέλος.
- Στον εξισωτή, αποτελείται από δύο παράλληλα βέλη $f, g : A \Rightarrow B$.
- Στο pullback, αποτελείται από δύο βέλη $f : A \rightarrow C$ και $g : B \rightarrow C$ με κοινό στόχο.

Τα σχήματα αυτά τα ζωγραφίζουμε στο χαρτί, αλλά για να τα χρησιμοποιήσουμε σε έναν ορισμό χρειαζόμαστε την ακριβή μαθηματική τους σημασία. Την έχουμε ήδη, γιατί μια εικόνα από αντικείμενα και βέλη που συνθέτονται είναι ένας συναρτητής.¹

Ορισμός 1.1 (Διάγραμμα). Έστω $\mathcal{C}$ κατηγορία και $\mathcal{J}$ μια μικρή κατηγορία, που την ονομάζουμε **κατηγορία δείκτη** (index category). Ένα **διάγραμμα** σχήματος $\mathcal{J}$ στην $\mathcal{C}$ είναι ένας συναρτητής $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$.

Ο D στέλνει κάθε αντικείμενο j της $\mathcal{J}$ σε ένα αντικείμενο $D(j)$ της $\mathcal{C}$, και κάθε βέλος $\alpha : i \rightarrow j$ σε ένα βέλος $D(\alpha) : D(i) \rightarrow D(j)$. Η $\mathcal{J}$ δεν μας ενδιαφέρει από μόνη της. Παίζει τον ρόλο ενός εκμαγείου που καθορίζει το σχήμα του διαγράμματος. Τη ζητάμε μικρή, γιατί παρακάτω θα σχηματίσουμε γινόμενα με δείκτες τα αντικείμενά της.² Όταν ζωγραφίζουμε μια κατηγορία δείκτη σχεδιάζουμε μόνο τα βέλη που παράγουν τα υπόλοιπα. Οι ταυτοτικές και οι συνθέσεις υπάρχουν πάντοτε, αλλά προκύπτουν αυτόματα.

Παράδειγμα 1.2 (Οι τρεις κατηγορίες δείκτες). Οι τρεις κατασκευές που είδαμε αντιστοιχούν σε τρεις κατηγορίες δείκτες.

¹Βλ. ενότητα 10.1 του βιβλίου μας.

²Για τις μικρές κατηγορίες βλ. ενότητα 3.11 του βιβλίου μας.

(α') Για το γινόμενο, η $\mathcal{J}$ έχει δύο αντικείμενα και κανένα μη ταυτοτικό βέλος. Ένα διάγραμμα είναι ένα ζεύγος αντικειμένων $A = D(1)$ και $B = D(2)$.

$$1 \quad 2 \quad \xrightarrow{D} \quad A \quad B$$

(β') Για τον εξισωτή, η $\mathcal{J}$ έχει δύο αντικείμενα και δύο παράλληλα βέλη $\alpha, \beta : 1 \rightarrow 2$. Ένα διάγραμμα είναι ένα ζεύγος παράλληλων βελών $f = D(\alpha)$ και $g = D(\beta)$.

$$1 \xrightleftharpoons[\beta]{\alpha} 2 \quad \xrightarrow{D} \quad A \xrightleftharpoons[g]{f} B$$

(γ') Για το pullback, η $\mathcal{J}$ έχει τρία αντικείμενα και δύο βέλη $\alpha : 1 \rightarrow 3$ και $\beta : 2 \rightarrow 3$. Ένα διάγραμμα είναι ένα ζεύγος βελών $f = D(\alpha)$ και $g = D(\beta)$ με κοινό στόχο $C = D(3)$.

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ & \searrow \alpha & \swarrow \beta \\ & 3 & \end{array} \quad \xrightarrow{D} \quad \begin{array}{ccc} A & & B \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & C & \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι οι δείκτες 1, 2, 3 είναι απλώς ονόματα. Σημασία έχουν το πλήθος των αντικειμένων και η δομή των βελών.

2 Κώνοι

Σε καθεμία από τις τρεις κατασκευές αναζητούμε ένα αντικείμενο N που βρίσκεται «πάνω» από το διάγραμμα και στέλνει ένα βέλος προς κάθε κόμβο του, με τα βέλη αυτά να σέβονται τη δομή του διαγράμματος. Η έννοια αυτή λέγεται κώνος.

Ορισμός 2.1 (Κώνος). Έστω $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ ένα διάγραμμα. Ένας κώνος (cone) με κορυφή $N \in \mathcal{C}$ πάνω στο D είναι μια οικογένεια μορφισμών

$$\lambda_j : N \rightarrow D(j), \quad j \in \text{ob}(\mathcal{J}),$$

τέτοια ώστε για κάθε βέλος $\alpha : i \rightarrow j$ της $\mathcal{J}$ να ισχύει

$$D(\alpha) \circ \lambda_i = \lambda_j.$$

Η συνθήκη λέει ότι κάθε τρίγωνο της μορφής

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ \lambda_i \swarrow & & \searrow \lambda_j \\ D(i) & \xrightarrow{D(\alpha)} & D(j) \end{array}$$

αντιμετατίθεται. Τα βέλη προς τους κόμβους δεν τα επιλέγουμε αυθαίρετα, αλλά τα συντονίζουμε με τα βέλη του διαγράμματος.³

Ας δούμε τι σημαίνει ο ορισμός στις τρεις περιπτώσεις του Παραδείγματος 1.2.

³Βλ. ενότητα 10.2 του βιβλίου μας.

Παράδειγμα 2.2 (Κώνοι στις τρεις περιπτώσεις). (α') Στο διάγραμμα $\{A, B\}$ ένας κώνος με κορυφή N είναι ένα ζεύγος βελών $\lambda_A : N \rightarrow A$ και $\lambda_B : N \rightarrow B$. Δεν υπάρχουν μη ταυτοτικά βέλη στην $\mathcal{J}$, άρα δεν απαιτείται καμία συνθήκη.

(β') Στο διάγραμμα $f, g : A \rightrightarrows B$ ένας κώνος έχει δύο συνιστώσες $\lambda_A : N \rightarrow A$ και $\lambda_B : N \rightarrow B$. Η συνθήκη εφαρμόζεται και στα δύο βέλη α, β και δίνει $f \circ \lambda_A = \lambda_B$ και $g \circ \lambda_A = \lambda_B$. Άρα $f \circ \lambda_A = g \circ \lambda_A$, και το λ_B καθορίζεται από το λ_A ως $\lambda_B = f \circ \lambda_A$. Ένας κώνος είναι επομένως ουσιαστικά ένα βέλος $\lambda_A : N \rightarrow A$ που ικανοποιεί $f \circ \lambda_A = g \circ \lambda_A$.

(γ') Στο διάγραμμα $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ ένας κώνος έχει τρεις συνιστώσες λ_A, λ_B και λ_C με $f \circ \lambda_A = \lambda_C$ και $g \circ \lambda_B = \lambda_C$. Άρα $f \circ \lambda_A = g \circ \lambda_B$, και το λ_C καθορίζεται από αυτή την κοινή τιμή. Ένας κώνος είναι επομένως ουσιαστικά ένα ζεύγος βελών $\lambda_A : N \rightarrow A$ και $\lambda_B : N \rightarrow B$ που συμφωνούν στο C .

Διαισθητική εικόνα

Ένας κώνος είναι ένα αντικείμενο που «βλέπει» ολόκληρο το διάγραμμα με τρόπο συμβατό με τα βέλη του. Στα τρία παραδείγματα ένας κώνος είναι ένα ζεύγος βελών χωρίς καμία συνθήκη, ένα βέλος που εξισώνει τα f και g , και ένα ζεύγος βελών που συμφωνεί στον κοινό στόχο.

Παρατήρηση 2.3 (Ο κώνος ως φυσικός μετασχηματισμός). Έστω $\Delta_N : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ ο σταθερός συναρτητής, που στέλνει κάθε αντικείμενο στο N και κάθε βέλος στο id_N . Ένας κώνος με κορυφή N πάνω στο D είναι ακριβώς ένας φυσικός μετασχηματισμός $\lambda : \Delta_N \Rightarrow D$. Πράγματι, το τετράγωνο φυσικότητας για ένα βέλος $\alpha : i \rightarrow j$ δίνει $D(\alpha) \circ \lambda_i = \lambda_j \circ \Delta_N(\alpha) = \lambda_j$, που είναι η συνθήκη του Ορισμού 2.1.⁴

3 Το όριο

Σε κάθε κατασκευή που είδαμε δεν μας αρκεί ένας οποιοσδήποτε κώνος. Στο γινόμενο, για παράδειγμα, υπάρχουν πολλά αντικείμενα με βέλη προς τα A και B , και ξεχωρίζει εκείνο από το οποίο περνά μοναδικά κάθε άλλο. Το ίδιο ζητάμε και τώρα.

Ορισμός 3.1 (Όριο). Έστω $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ ένα διάγραμμα. Το **όριο** (limit) του D είναι ένας κώνος $(\lim D, \lambda_j : \lim D \rightarrow D(j))$ με την εξής ιδιότητα. Για κάθε κώνο $(N, \mu_j : N \rightarrow D(j))$ πάνω στο D υπάρχει μοναδικός μορφισμός $u : N \rightarrow \lim D$ ώστε

$$\lambda_j \circ u = \mu_j \quad \text{για κάθε } j \in \text{ob}(\mathcal{J}).$$

Τον κώνο αυτόν τον λέμε και **καθολικό κώνο** του D .

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\exists! u} & \lim D \\ & \searrow \mu_j & \downarrow \lambda_j \\ & & D(j) \end{array}$$

Ο ορισμός είναι η καθολική ιδιότητα που ξέρουμε, με την ίδια μορφή «ύπαρξη και μοναδικότητα». Το νόημά του φαίνεται καλύτερα αν παρατηρήσουμε ότι οι κώνοι πάνω στο D σχηματίζουν και οι ίδιοι μια κατηγορία. Τα αντικείμενά της είναι οι κώνοι (N, μ) . Ένας μορφισμός από τον (N, μ) στον (N', μ') είναι ένας μορφισμός $f : N \rightarrow N'$ της $\mathcal{C}$ με $\mu'_j \circ f = \mu_j$ για κάθε j . Ο ορισμός του ορίου λέει ακριβώς ότι

⁴Βλ. ενότητα 10.2 του βιβλίου μας.

ο καθολικός κώνος είναι ένα τελικό αντικείμενο αυτής της κατηγορίας, γιατί από κάθε κώνο υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός προς αυτόν.⁵ Έτσι η μοναδικότητα του ορίου προκύπτει από μια γενική ιδιότητα των τελικών αντικειμένων.

Πρόταση 3.2 (Μοναδικότητα του ορίου). *Αν (L, λ) και (L', λ') είναι δύο όρια του διαγράμματος D , τότε υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός $\varphi : L \rightarrow L'$ με $\lambda'_j \circ \varphi = \lambda_j$ για κάθε j .*

Απόδειξη. Αφού ο (L', λ') είναι τελικός στην κατηγορία των κώνων, υπάρχει μοναδικός μορφισμός κώνων $\varphi : (L, \lambda) \rightarrow (L', \lambda')$. Συμμετρικά υπάρχει μοναδικός $\psi : (L', \lambda') \rightarrow (L, \lambda)$. Η σύνθεση $\psi \circ \varphi$ είναι μορφισμός κώνων από τον (L, λ) στον εαυτό του, όπως και η id_L . Αφού ο (L, λ) είναι τελικός, υπάρχει ένας μόνο τέτοιος μορφισμός, άρα $\psi \circ \varphi = \text{id}_L$. Ομοίως $\varphi \circ \psi = \text{id}_{L'}$. $\square$

Το όριο είναι λοιπόν μοναδικό ως προς ισομορφισμό που σέβεται τις συνιστώσες λ_j , και γι' αυτό μιλάμε για το όριο και γράφουμε $\lim D$. Το επιχείρημα είναι το ίδιο με εκείνο που δώσαμε για το γινόμενο στη σημείωση «Η καθολική ιδιότητα», διατυπωμένο τώρα για τελικά αντικείμενα.

4 Το γινόμενο, ο εξισωτής και το pullback ως όρια

Ας ελέγξουμε ότι ο γενικός ορισμός ξαναβρίσκει τις τρεις κατασκευές.

Γινόμενο. Στο διάγραμμα $\{A, B\}$ ένας κώνος είναι ένα ζεύγος βελών $\mu_A : N \rightarrow A$ και $\mu_B : N \rightarrow B$, χωρίς συνθήκη. Ο καθολικός κώνος είναι ένα αντικείμενο L με δύο βέλη λ_A και λ_B , ώστε κάθε τέτοιο ζεύγος να περνά μοναδικά από αυτό. Αυτός είναι ακριβώς ο ορισμός του γινομένου, με τις προβολές στη θέση των λ_A και λ_B . Άρα $\lim D = A \times B$. Το ίδιο ισχύει για ένα διακριτό σχήμα με οσαδήποτε αντικείμενα, όπου το όριο είναι το γινόμενο όλων τους.

Εξισωτής. Στο διάγραμμα $f, g : A \rightrightarrows B$ ένας κώνος είναι, όπως είδαμε, ένα βέλος $\mu_A : N \rightarrow A$ με $f \circ \mu_A = g \circ \mu_A$, μαζί με το $\mu_B = f \circ \mu_A$. Έστω $e : E \rightarrow A$ ο εξισωτής των f και g . Ο E με τα βέλη e και $f \circ e$ είναι κώνος, γιατί $f \circ e = g \circ e$. Δεν είναι απλώς κώνος, είναι ο καθολικός. Αν (N, μ_A, μ_B) είναι κώνος, τότε $f \circ \mu_A = g \circ \mu_A$, άρα υπάρχει μοναδικό $u : N \rightarrow E$ με $e \circ u = \mu_A$, και τότε $(f \circ e) \circ u = f \circ \mu_A = \mu_B$. Αντίστροφα, κάθε u' που ικανοποιεί τις δύο ισότητες του ορισμού του ορίου ικανοποιεί και την $e \circ u' = \mu_A$, άρα $u' = u$. Επομένως $\lim D = \text{Eq}(f, g)$.

Pullback. Στο διάγραμμα $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ ένας κώνος είναι ένα ζεύγος βελών $\mu_A : N \rightarrow A$ και $\mu_B : N \rightarrow B$ με $f \circ \mu_A = g \circ \mu_B$, μαζί με το $\mu_C = f \circ \mu_A$. Έστω (P, p_1, p_2) το pullback των f και g . Ο P με τα βέλη p_1, p_2 και $f \circ p_1$ είναι κώνος. Για κάθε άλλο κώνο το ζεύγος (μ_A, μ_B) συμφωνεί στο C , άρα υπάρχει μοναδικό $u : N \rightarrow P$ με $p_1 \circ u = \mu_A$ και $p_2 \circ u = \mu_B$, και τότε $(f \circ p_1) \circ u = \mu_C$. Επομένως $\lim D = A \times_C B$.

κατηγορία δείκτης	κώνος με κορυφή N	όριο
δύο αντικείμενα, κανένα βέλος	ζεύγος βελών $N \rightarrow A, N \rightarrow B$	$A \times B$
δύο παράλληλα βέλη	βέλος $h : N \rightarrow A$ με $f \circ h = g \circ h$	$\text{Eq}(f, g)$
δύο βέλη με κοινό στόχο	ζεύγος $N \rightarrow A, N \rightarrow B$ που συμφωνεί στο C	$A \times_C B$

Οι τρεις κατασκευές είναι λοιπόν η ίδια κατασκευή, που εμφανίστηκε τρεις φορές με διαφορετικό

⁵Βλ. ενότητα 10.3 του βιβλίου μας. Για τα τελικά αντικείμενα βλ. ενότητα 3.9.

σχήμα.⁶ Δεν ορίζουμε εκ νέου το γινόμενο, τον εξισωτή και το pullback. Τα αναγνωρίζουμε ως ειδικές περιπτώσεις του ορίου.

Βασική ιδέα

Το όριο είναι η καθολική ιδιότητα που εφαρμόζεται σε ένα τυχαίο διάγραμμα. Αυτό που αλλάζει από κατασκευή σε κατασκευή είναι μόνο η κατηγορία δείκτης.

5 Δύο ακραίες περιπτώσεις

Για να καταλάβουμε καλύτερα τον ορισμό, ας δούμε δύο ακραίες κατηγορίες δείκτες.

Το κενό διάγραμμα. Η μικρότερη δυνατή κατηγορία δείκτης είναι η κενή κατηγορία, χωρίς αντικείμενα και χωρίς βέλη. Ένα διάγραμμα σχήματος $\mathcal{J} = \emptyset$ δεν περιέχει τίποτα, και ένας κώνος πάνω σε αυτό είναι απλώς ένα αντικείμενο N , χωρίς καμία συνιστώσα και χωρίς καμία συνθήκη. Το όριο είναι τότε ένα αντικείμενο T με την ιδιότητα ότι για κάθε αντικείμενο N υπάρχει μοναδικός μορφισμός $N \rightarrow T$. Δηλαδή το όριο του κενού διαγράμματος είναι ένα τελικό αντικείμενο.⁷ Στη **Set** είναι κάθε μονοσύνολο και στη **Grp** η τετριμμένη ομάδα. Δεν χρειάζεται ειδικός ορισμός, γιατί το τελικό αντικείμενο είναι ήδη ένα όριο.

Διαγράμματα με αρχικό αντικείμενο. Στην άλλη άκρη βρίσκονται τα σχήματα που έχουν αρχικό αντικείμενο.

Πρόταση 5.1. Έστω ότι η κατηγορία δείκτης $\mathcal{J}$ έχει αρχικό αντικείμενο 0 , και για κάθε j έστω $\alpha_j : 0 \rightarrow j$ ο μοναδικός μορφισμός. Τότε για κάθε διάγραμμα $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ το όριο είναι το $D(0)$, με συνιστώσες $\lambda_j = D(\alpha_j)$.

Απόδειξη. Πρώτα ελέγχουμε ότι η οικογένεια $\lambda_j = D(\alpha_j)$ είναι κώνος με κορυφή $D(0)$. Για κάθε βέλος $\beta : i \rightarrow j$ οι $\beta \circ \alpha_i$ και α_j είναι μορφισμοί $0 \rightarrow j$, άρα συμπίπτουν. Συνεπώς $D(\beta) \circ \lambda_i = D(\beta \circ \alpha_i) = D(\alpha_j) = \lambda_j$.

Έστω τώρα ένας κώνος (N, μ_j) . Η συνθήκη του κώνου για το α_j δίνει $D(\alpha_j) \circ \mu_0 = \mu_j$, δηλαδή $\lambda_j \circ \mu_0 = \mu_j$ για κάθε j . Άρα το $u = \mu_0$ ικανοποιεί την απαίτηση του ορισμού. Είναι και μοναδικό, γιατί το α_0 είναι η id_0 , οπότε $\lambda_0 = \text{id}_{D(0)}$, και κάθε u με $\lambda_0 \circ u = \mu_0$ ικανοποιεί $u = \mu_0$. $\square$

Για παράδειγμα, στο διάγραμμα $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, που έχει σχήμα $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ (μαζί με τη σύνθεση $0 \rightarrow 2$), το όριο είναι το A , με συνιστώσες id_A , f και $g \circ f$. Το ίδιο ισχύει για ένα αντιμεταθετικό τετράγωνο, του οποίου το όριο είναι η πάνω αριστερή κορυφή. Σε τέτοια σχήματα η πληροφορία βρίσκεται ήδη στο αρχικό αντικείμενο, και ο κώνος δεν έχει κάτι να προσθέσει.

Προσοχή

Στα σχήματα χωρίς αρχικό αντικείμενο εμφανίζονται οι πιο χαρακτηριστικές μη τετριμμένες κατασκευές ορίων. Στο σχήμα του pullback δεν υπάρχει βέλος μεταξύ των 1 και 2, άρα δεν υπάρχει αρχικό αντικείμενο, και το όριο $A \times_C B$ δεν είναι γενικά ισόμορφο με κανένα από τα A, B, C .

⁶Βλ. ενότητες 10.4, 10.5 και 10.6 του βιβλίου μας.

⁷Βλ. ενότητες 3.9 και 10.7 του βιβλίου μας. Το τελικό αντικείμενο είναι το κενό γινόμενο.

6 Τα όρια στα σύνολα και στις ομάδες

Στη **Set** το όριο έχει μια πολύ συγκεκριμένη περιγραφή. Έστω $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathbf{Set}$ ένα διάγραμμα. Ονομάζουμε συμβατή μια οικογένεια $(x_j)_{j \in \text{ob}(\mathcal{J})}$ του γινομένου $\prod_j D(j)$ αν

$$D(\alpha)(x_i) = x_j \quad \text{για κάθε βέλος } \alpha : i \rightarrow j \text{ της } \mathcal{J}.$$

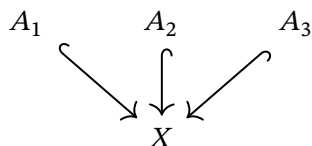
Πρόταση 6.1 (Όρια στα σύνολα). Το σύνολο L των συμβατών οικογενειών, μαζί με τους περιορισμούς $\lambda_j : L \rightarrow D(j)$ των προβολών $\prod_k D(k) \rightarrow D(j)$, είναι το όριο του D .⁸

Απόδειξη. Το (L, λ) είναι κώνος, γιατί αν $(x_j) \in L$ τότε $D(\alpha)(\lambda_i(x)) = D(\alpha)(x_i) = x_j = \lambda_j(x)$. Έστω κώνος (N, μ_j) και $n \in N$. Η οικογένεια $(\mu_j(n))_j$ είναι συμβατή, γιατί από τη συνθήκη του κώνου έχουμε $D(\alpha)(\mu_i(n)) = \mu_j(n)$. Ορίζουμε $u(n) = (\mu_j(n))_j$, και τότε $\lambda_j \circ u = \mu_j$. Αν μια συνάρτηση u' ικανοποιεί τις ίδιες ιδιότητες, οι συνιστώσες του $u'(n)$ είναι οι $\mu_j(n)$, άρα $u' = u$. $\square$

Στη **Set** το όριο είναι λοιπόν κυριολεκτικά το σύνολο των λύσεων ενός συστήματος εξισώσεων, αυτού που ορίζει το διάγραμμα. Ας το δούμε σε δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 6.2 (Το pullback). Για το διάγραμμα $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ μια συμβατή οικογένεια είναι μια τριάδα (a, b, c) με $f(a) = c$ και $g(b) = c$. Η τρίτη συνιστώσα καθορίζεται από την πρώτη, άρα το όριο ταυτίζεται με το σύνολο των ζευγών $(a, b) \in A \times B$ με $f(a) = g(b)$. Αυτό είναι ακριβώς το pullback της σημείωσης «Το pullback και η τομή συνόλων».

Παράδειγμα 6.3 (Η τομή τριών υποσυνόλων). Έστω $A_1, A_2, A_3 \subseteq X$ και το διάγραμμα που έχει τα A_1, A_2, A_3 και X ως αντικείμενα, και τις τρεις εγκλείσεις $A_i \hookrightarrow X$ ως βέλη. Το σχήμα είναι σαν εκείνο του pullback, με τρία βέλη προς έναν κοινό στόχο αντί για δύο.



Μια συμβατή οικογένεια είναι μια τετράδα (a_1, a_2, a_3, x) με $a_1 = a_2 = a_3 = x$. Έτσι τα στοιχεία του ορίου αντιστοιχούν στα $x \in A_1 \cap A_2 \cap A_3$, και το όριο είναι η τριπλή τομή. Αν, για παράδειγμα, $X = \mathbb{Z}$ και τα A_1, A_2, A_3 είναι τα πολλαπλάσια του 2, του 3 και του 5, το όριο είναι το σύνολο των πολλαπλασίων του 30.

Η ίδια περιγραφή ισχύει στις ομάδες.

Πρόταση 6.4 (Όρια στις ομάδες). Έστω $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathbf{Grp}$ ένα διάγραμμα. Το σύνολο L των συμβατών οικογενειών είναι υποομάδα του γινομένου $\prod_j D(j)$, και μαζί με τους περιορισμούς των προβολών είναι το όριο του D στη **Grp**.⁹

Απόδειξη. Η πράξη του γινομένου ορίζεται κατά συνιστώσα. Η οικογένεια των ουδετέρων στοιχείων είναι συμβατή, γιατί $D(\alpha)(e_i) = e_j$. Αν οι (x_j) και (y_j) είναι συμβατές, τότε

$$D(\alpha)(x_i y_i) = D(\alpha)(x_i) D(\alpha)(y_i) = x_j y_j \quad \text{και} \quad D(\alpha)(x_i^{-1}) = D(\alpha)(x_i)^{-1} = x_j^{-1},$$

άρα οι $(x_j y_j)$ και (x_j^{-1}) είναι συμβατές. Σε κάθε βήμα χρησιμοποιήσαμε ότι τα $D(\alpha)$ είναι ομομορφισμοί. Άρα το L είναι υποομάδα, και οι λ_j είναι ομομορφισμοί ως περιορισμοί ομομορφισμών. Αν οι μ_j είναι ομομορφισμοί, η συνάρτηση $u(n) = (\mu_j(n))_j$ της Πρότασης 6.1 είναι ομομορφισμός, γιατί είναι ομομορφισμός σε κάθε συνιστώσα. Η μοναδικότητα προκύπτει από τη μοναδικότητα στη **Set**. $\square$

⁸Βλ. ενότητα 10.8 του βιβλίου μας.

⁹Βλ. ενότητα 10.8 του βιβλίου μας.

Για παράδειγμα, αν $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2$ είναι ο ομομορφισμός υπολοίπου, το pullback των φ και φ είναι η υποομάδα

$$\{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m \equiv n \pmod{2}\}$$

του $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Το ίδιο σχήμα επαναλαμβάνεται σε κάθε κατηγορία της οποίας τα αντικείμενα είναι σύνολα με δομή και τα βέλη απεικονίσεις που τη διατηρούν.¹⁰

Ορισμός 6.5 (Πλήρης κατηγορία). Μια κατηγορία $\mathcal{C}$ λέγεται **πλήρης** (complete) αν κάθε διάγραμμα $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ με μικρή $\mathcal{J}$ έχει όριο, και **πεπερασμένα πλήρης** (finitely complete) αν το ίδιο ισχύει για κάθε πεπερασμένη $\mathcal{J}$.

Οι **Set** και **Grp** είναι πλήρεις, όπως δείχνουν οι προηγούμενες προτάσεις. Το ίδιο ισχύει για τις **Top** και **Vect_F**, με την αντίστοιχη δομή.¹¹

Βασική ιδέα

Ένα διάγραμμα είναι ένα σύστημα περιορισμών, ένας κώνος είναι μια λύση του, και το όριο είναι η καθολική λύση, δηλαδή εκείνη από την οποία περνά μοναδικά κάθε άλλη λύση. Το γινόμενο δεν έχει κανέναν περιορισμό, ο εξισωτής έχει τον $f(x) = g(x)$, το pullback τον $f(a) = g(b)$, και η τριπλή τομή τις συνθήκες $x \in A_i$.^{α'}

^{α'}Βλ. ενότητα 10.9 του βιβλίου μας.

7 Κατασκευή από γινόμενα και εξισωτές

Τα όρια φαίνονται πολλά και διαφορετικά, αφού κάθε κατηγορία δείκτης δίνει το δικό της. Ισχύει όμως ότι τα πεπερασμένα όρια κατασκευάζονται από δύο μόνο είδη, τα γινόμενα και τους εξισωτές. Με «πεπερασμένα γινόμενα» εννοούμε γινόμενα οποιουδήποτε πεπερασμένου πλήθους παραγόντων, και το κενό γινόμενο είναι το τελικό αντικείμενο.

Θεώρημα 7.1. Μια κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι πεπερασμένα πλήρης αν και μόνο αν έχει πεπερασμένα γινόμενα και εξισωτές.¹²

Απόδειξη. Τα γινόμενα και οι εξισωτές είναι όρια πεπερασμένων διαγραμμάτων (Ενότητες 4 και 5), άρα η μία κατεύθυνση είναι άμεση.

Αντίστροφα, έστω $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ με $\mathcal{J}$ πεπερασμένη. Σχηματίζουμε δύο γινόμενα,

$$P = \prod_{j \in \text{ob}(\mathcal{J})} D(j), \quad Q = \prod_{\alpha : i \rightarrow j} D(j),$$

όπου το δεύτερο γινόμενο έχει έναν παράγοντα $D(j)$ για κάθε μη ταυτοτικό βέλος $\alpha : i \rightarrow j$ της $\mathcal{J}$, με το j να είναι ο στόχος του α . Συμβολίζουμε με $\pi_j : P \rightarrow D(j)$ και $\rho_\alpha : Q \rightarrow D(j)$ τις προβολές. Ορίζουμε δύο μορφισμούς $s, t : P \rightarrow Q$ από τις συνιστώσες τους,

$$\rho_\alpha \circ s = \pi_j, \quad \rho_\alpha \circ t = D(\alpha) \circ \pi_i.$$

¹⁰Στη **Top** το γινόμενο $\prod_j D(j)$ φέρει την τοπολογία γινομένου και το σύνολο των συμβατών οικογενειών την τοπολογία υποχώρου. Στη **Vect_F** το αντίστοιχο σύνολο είναι υπόχωρος του ευθέως γινομένου.

¹¹Βλ. ενότητες 10.3 και 10.8 του βιβλίου μας.

¹²Βλ. ενότητα 10.7 του βιβλίου μας.

Οι δύο αυτές συνιστώσες είναι οι δύο διαδρομές του τριγώνου

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\pi_i} & D(i) \\ & \searrow \pi_j & \downarrow D(\alpha) \\ & & D(j) \end{array}$$

και συμπίπτουν ακριβώς όταν το τρίγωνο αντιμετατίθεται. Έστω

$$E \xrightarrow{e} P \xrightleftharpoons[t]{s} Q$$

ο εξισωτής των s και t , και $\lambda_j = \pi_j \circ e$. Θα δείξουμε ότι ο (E, λ) είναι το όριο του D .

Είναι κώνος. Για μη ταυτοτικό $\alpha : i \rightarrow j$ η ισότητα $s \circ e = t \circ e$ δίνει, μετά τη σύνθεση με το ρ_α , $\pi_j \circ e = D(\alpha) \circ \pi_i \circ e$, δηλαδή $\lambda_j = D(\alpha) \circ \lambda_i$. Για ταυτοτικό βέλος η συνθήκη ισχύει τετριμμένα.

Είναι καθολικός. Έστω κώνος (N, μ_j) . Από την καθολική ιδιότητα του P υπάρχει μοναδικός $h : N \rightarrow P$ με $\pi_j \circ h = \mu_j$ για κάθε j . Για κάθε μη ταυτοτικό $\alpha : i \rightarrow j$ έχουμε

$$\rho_\alpha \circ s \circ h = \pi_j \circ h = \mu_j \quad \text{και} \quad \rho_\alpha \circ t \circ h = D(\alpha) \circ \pi_i \circ h = D(\alpha) \circ \mu_i = \mu_j,$$

άρα, από τη μοναδικότητα στο γινόμενο Q , ισχύει $s \circ h = t \circ h$. Από την καθολική ιδιότητα του εξισωτή υπάρχει μοναδικός $u : N \rightarrow E$ με $e \circ u = h$, και τότε $\lambda_j \circ u = \pi_j \circ h = \mu_j$. Αν ένας u' ικανοποιεί $\lambda_j \circ u' = \mu_j$ για κάθε j , τότε $\pi_j \circ (e \circ u') = \mu_j$ για κάθε j , άρα $e \circ u' = h$ από τη μοναδικότητα στο P , και επομένως $u' = u$ από τη μοναδικότητα στον εξισωτή. $\square$

Ας δούμε την κατασκευή στο pullback. Για το διάγραμμα $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ τα μη ταυτοτικά βέλη είναι δύο, και τα δύο έχουν στόχο το C . Έτσι $P = A \times B \times C$ και $Q = C \times C$, με

$$s(a, b, c) = (c, c), \quad t(a, b, c) = (f(a), g(b)).$$

Στη **Set** ο εξισωτής των s και t αποτελείται από τις τριάδες με $c = f(a)$ και $c = g(b)$, δηλαδή ταυτίζεται με το σύνολο των ζευγών (a, b) με $f(a) = g(b)$. Ξαναβρίσκουμε το pullback, αυτή τη φορά κατασκευασμένο από ένα γινόμενο και έναν εξισωτή.

Το ίδιο επιχείρημα, με γινόμενα αυθαίρετων μικρών οικογενειών, δείχνει ότι μια κατηγορία είναι πλήρης αν και μόνο αν έχει όλα τα μικρά γινόμενα και όλους τους εξισωτές.

8 Τα όρια και τα συν-όρια

Αν αντιστρέψουμε όλα τα βέλη στους ορισμούς του κώνου και του ορίου, παίρνουμε τα συν-όρια. Τα βέλη του κώνου φτάνουν τότε σε μια κορυφή αντί να φεύγουν από αυτήν, και το συν-όριο είναι ο καθολικός τέτοιος κώνος. Το συν-γινόμενο και το pushout, που συναντήσαμε στις σημειώσεις «Η καθολική ιδιότητα» και «Το pushout και η ένωση συνόλων», είναι συν-όρια, ακριβώς όπως το γινόμενο και το pullback είναι όρια. Τα συν-όρια τα εξετάζει το κεφάλαιο 11 του βιβλίου.

Τα όρια σχετίζονται και με τις προσαρτήσεις. Στη σημείωση «Η προσάρτηση», στην ενότητα «Οι συζυγείς συναρτητές και τα όρια», είδαμε ότι ένας δεξιός συζυγής διατηρεί τα γινόμενα. Ισχύει γενικότερα ότι διατηρεί όλα τα όρια που υπάρχουν, και ένας αριστερός συζυγής όλα τα συν-όρια. Τώρα καταλαβαίνουμε γιατί η ιδιότητα αυτή είναι τόσο ισχυρή. Δεν αφορά μόνο τα γινόμενα, αλλά κάθε κατασκευή που ορίζεται από ένα διάγραμμα.

9 Σύνοψη

- Ένα διάγραμμα σχήματος $\mathcal{J}$ στην $\mathcal{C}$ είναι ένας συναρτητής $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$, με μικρή κατηγορία δείκτη $\mathcal{J}$.
- Ένας κώνος πάνω στο D είναι ένα αντικείμενο N με βέλη $\lambda_j : N \rightarrow D(j)$ που σέβονται τα βέλη του διαγράμματος, δηλαδή $D(\alpha) \circ \lambda_i = \lambda_j$.
- Το όριο $\lim D$ είναι ο καθολικός κώνος. Κάθε άλλος κώνος περνά μοναδικά από αυτόν. Οι κώνοι σχηματίζουν κατηγορία, και το όριο είναι τελικό αντικείμενό της, άρα είναι μοναδικό ως προς ισομορφισμό.
- Το γινόμενο, ο εξισωτής και το pullback είναι τα όρια των τριών απλούστερων σχημάτων. Το όριο του κενού διαγράμματος είναι το τελικό αντικείμενο.
- Αν η κατηγορία δείκτη έχει αρχικό αντικείμενο 0 , το όριο είναι το $D(0)$. Οι χαρακτηριστικές κατασκευές ορίων εμφανίζονται σε σχήματα χωρίς αρχικό αντικείμενο.
- Στη **Set** και στη **Grp** το όριο είναι το σύνολο ή η υποομάδα των συμβατών οικογενειών του γινομένου $\prod_j D(j)$.
- Μια κατηγορία είναι πεπερασμένα πλήρης αν και μόνο αν έχει πεπερασμένα γινόμενα και εξισωτές. Το όριο ενός πεπερασμένου διαγράμματος είναι ο εξισωτής δύο μορφισμών μεταξύ γινομένων.
- Τα συν-όρια προκύπτουν με αντιστροφή των βελών.