

Η καθολική ιδιότητα

Από το γινόμενο στον ορισμό μέσω μορφισμών

Σημειώσεις που συνοδεύουν το βιβλίο «Εισαγωγή στη Θεωρία Κατηγοριών» των εκδόσεων ΔΙΑΥΛΟΣ.

Σεπτέμβριος 2026

Το καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων είναι το σύνολο των ζευγών. Το ευθύ γινόμενο δύο ομάδων είναι κι αυτό ένα σύνολο ζευγών, με πράξη στα στοιχεία. Το ίδιο ισχύει για το γινόμενο δύο διανυσματικών χώρων. Σε κάθε περίπτωση η κατασκευή φαίνεται διαφορετική, και όμως κάτι κοινό παραμένει. Σε αυτές τις σημειώσεις περιγράφουμε το κοινό αυτό στοιχείο, που ονομάζεται καθολική ιδιότητα. Ξεκινάμε από το γινόμενο στα σύνολα, βλέπουμε την ίδια ιδιότητα σε ομάδες και σε διανυσματικούς χώρους, την ορίζουμε σε μια τυχαία κατηγορία, και δείχνουμε ότι ένα αντικείμενο που την ικανοποιεί είναι μοναδικό ως προς ισομορφισμό. Στο τέλος βλέπουμε πώς η ίδια μέθοδος ορίζει το συν-γινόμενο και τον εξισωτή.

Τι προϋποθέτουμε. Από τη Θεωρία Συνόλων χρειαζόμαστε τις έννοιες της συνάρτησης και του καρτεσιανού γινομένου. Από τη Θεωρία Κατηγοριών χρειαζόμαστε τις έννοιες της κατηγορίας, του μορφισμού, της σύνθεσης και του ισομορφισμού, όπως τις παρουσιάζουμε στο βιβλίο μας «Εισαγωγή στη Θεωρία Κατηγοριών», στο κεφάλαιο 3. Την καθολική ιδιότητα τη θεμελιώνουμε εδώ από την αρχή. Στο βιβλίο τη βρίσκουμε στο κεφάλαιο 8. Σε κάθε σημείο όπου χρησιμοποιούμε μια κατηγορική έννοια παραπέμπουμε στην αντίστοιχη ενότητα του βιβλίου.

1 Δύο τρόποι να ορίσουμε ένα αντικείμενο

Συνήθως ορίζουμε ένα μαθηματικό αντικείμενο λέγοντας από τι αποτελείται. Το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ είναι το σύνολο όλων των ζευγών (a, b) με $a \in A$ και $b \in B$. Αυτός είναι ένας κατασκευαστικός ορισμός, γιατί μας λέει τι υπάρχει μέσα στο αντικείμενο.

Η Θεωρία Κατηγοριών προτείνει έναν δεύτερο τρόπο. Ένα αντικείμενο δεν το χαρακτηρίζουμε από το τι περιέχει, αλλά από τα βέλη που φτάνουν σε αυτό και τα βέλη που φεύγουν από αυτό, δηλαδή από τον τρόπο που σχετίζεται με όλα τα άλλα αντικείμενα της κατηγορίας.¹ Αυτός είναι ένας σχεσιακός ορισμός. Ένας ορισμός αυτού του τύπου λέγεται **καθολική ιδιότητα** (universal property).

Οι δύο ορισμοί δεν αντικρούονται. Ο δεύτερος όμως αποκαλύπτει γιατί η κατασκευή λειτουργεί, και επιτρέπει να τη μεταφέρουμε σε οποιαδήποτε κατηγορία. Θα το δούμε στο γινόμενο, που είναι το πιο απλό παράδειγμα.

Βασική ιδέα

Μια καθολική ιδιότητα δεν λέει τι υπάρχει μέσα σε ένα αντικείμενο. Λέει ότι σε κάθε κατάλληλη οικογένεια βελών από ή προς οποιοδήποτε άλλο αντικείμενο αντιστοιχεί ακριβώς ένα βέλος.

2 Το γινόμενο στα σύνολα

Έστω δύο σύνολα A και B . Στο $A \times B$ έρχονται αυτόματα δύο συναρτήσεις, οι προβολές

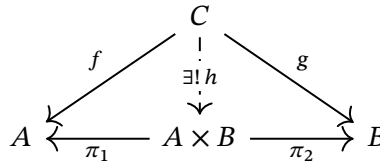
$$\pi_1 : A \times B \rightarrow A, \quad \pi_1(a, b) = a, \quad \pi_2 : A \times B \rightarrow B, \quad \pi_2(a, b) = b.$$

¹Βλ. ενότητα 8.1 του βιβλίου μας.

Οι προβολές δεν είναι συνέπεια της κατασκευής. Είναι συστατικό της.

Πολλά σύνολα έχουν βέλη προς το A και προς το B . Το $A \times B$ ξεχωρίζει από αυτά με την εξής ιδιότητα. Έστω οποιοδήποτε σύνολο C με δύο συναρτήσεις $f : C \rightarrow A$ και $g : C \rightarrow B$. Τότε υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $h : C \rightarrow A \times B$ ώστε

$$\pi_1 \circ h = f \quad \text{και} \quad \pi_2 \circ h = g.$$



Για να το δούμε, ελέγχουμε δύο πράγματα. Το πρώτο είναι η ύπαρξη. Ορίζουμε $h(c) = (f(c), g(c))$. Αυτή είναι συνάρτηση με τιμές στο $A \times B$, και προφανώς $\pi_1(h(c)) = f(c)$ και $\pi_2(h(c)) = g(c)$. Το δεύτερο είναι η μοναδικότητα. Αν μια συνάρτηση h' ικανοποιεί τις ίδιες δύο ισότητες, τότε για κάθε c ισχύει $h'(c) = (\pi_1(h'(c)), \pi_2(h'(c))) = (f(c), g(c)) = h(c)$, άρα $h' = h$.

Η διακεκομμένη γραμμή στο διάγραμμα σημαίνει ότι το βέλος h δεν το επιλέγουμε εμείς. Το προσδιορίζουν πλήρως τα f και g . Το νόημα του γινομένου βρίσκεται σε αυτή τη μοναδικότητα και όχι στο ότι τα στοιχεία του είναι ζεύγη.

3 Το ίδιο σε ομάδες και διανυσματικούς χώρους

Η ίδια ιδέα εμφανίζεται και στις άλλες δύο περιπτώσεις με τις οποίες ξεκινήσαμε.² Το ευθύ γινόμενο ομάδων $G \times H$ έχει ομομορφισμούς προβολής π_1 και π_2 . Για κάθε ομάδα K και κάθε ζεύγος ομομορφισμών $f : K \rightarrow G$ και $g : K \rightarrow H$ υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $h : K \rightarrow G \times H$ με $\pi_1 \circ h = f$ και $\pi_2 \circ h = g$. Το ίδιο ισχύει για το γινόμενο $V \times W$ διανυσματικών χώρων πάνω από ένα σώμα, με γραμμικές απεικονίσεις στη θέση των ομομορφισμών.

Ας δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Θεωρούμε $K = \mathbb{Z}/2$, $G = \mathbb{Z}/4$ και $H = \mathbb{Z}/6$, και τους ομομορφισμούς

$$f([x]_2) = [2x]_4, \quad g([x]_2) = [3x]_6.$$

Ο μοναδικός ομομορφισμός $h : \mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/6$ με $\pi_1 \circ h = f$ και $\pi_2 \circ h = g$ είναι ο

$$h([x]_2) = ([2x]_4, [3x]_6).$$

Είναι ομομορφισμός, γιατί οι δύο συνιστώσες του είναι ομομορφισμοί και η πράξη στο γινόμενο γίνεται κατά συνιστώσα. Και είναι ο μοναδικός, γιατί ένας ομομορφισμός προς το γινόμενο προσδιορίζεται πλήρως από τις δύο συνιστώσες του.

Και στις τρεις κατηγορίες βλέπουμε τον ίδιο ρόλο. Έχουμε ένα αντικείμενο με δύο βέλη προς τους παράγοντες, και κάθε ζεύγος βελών προς τους παράγοντες περνά μοναδικά από αυτό. Αυτό το κοινό σχήμα μπορούμε τώρα να το ορίσουμε χωρίς να αναφερόμαστε σε ζεύγη.

4 Ο ορισμός σε μια κατηγορία

Ορισμός 4.1 (Γινόμενο). Έστω $\mathcal{C}$ κατηγορία και A, B αντικείμενά της.³ Ένα **γινόμενο** (product) των A και B είναι ένα αντικείμενο P μαζί με δύο μορφισμούς $\pi_1 : P \rightarrow A$ και $\pi_2 : P \rightarrow B$, τέτοιο ώστε

²Βλ. ενότητα 8.3 του βιβλίου μας.

³Βλ. ενότητα 8.4 του βιβλίου μας.

για κάθε αντικείμενο C και κάθε ζεύγος μορφισμών $f : C \rightarrow A$ και $g : C \rightarrow B$ να υπάρχει μοναδικός μορφισμός $h : C \rightarrow P$ με

$$\pi_1 \circ h = f \quad \text{και} \quad \pi_2 \circ h = g.$$

Γράφουμε $P = A \times B$ και συμβολίζουμε τον μοναδικό μορφισμό h με $\langle f, g \rangle$. Ο ορισμός δεν λέει τίποτα για το τι υπάρχει μέσα στο P . Λέει μόνο πώς το P σχετίζεται με τα υπόλοιπα αντικείμενα.

Οι δύο απαιτήσεις του ορισμού, ύπαρξη και μοναδικότητα, χρειάζονται αμφότερες. Για να το δούμε, ας δώσουμε ένα παράδειγμα όπου η ύπαρξη ισχύει και η μοναδικότητα όχι.

Παράδειγμα 4.2 (Ένα μη παράδειγμα). Στην **Set** θεωρούμε σύνολα A και B , με το B να έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, το σύνολο $P = A \times B \times B$ και τις συναρτήσεις $\pi_1(a, b, b') = a$ και $\pi_2(a, b, b') = b$.⁴ Για κάθε σύνολο C και συναρτήσεις $f : C \rightarrow A$, $g : C \rightarrow B$ ικανοποιεί τις δύο ισότητες κάθε συνάρτηση της μορφής

$$h(c) = (f(c), g(c), k(c)),$$

όπου η $k : C \rightarrow B$ είναι αυθαίρετη. Αν το C δεν είναι κενό, αυτές είναι περισσότερες από μία. Η ύπαρξη ισχύει, η μοναδικότητα καταρρέει, και η τριάδα (P, π_1, π_2) δεν είναι γινόμενο.

Το παράδειγμα δείχνει ότι δεν αρκεί να υπάρχουν βέλη προς τα A και B . Το γινόμενο δεν έχει «περιττή πληροφορία», και αυτό ακριβώς εκφράζει η μοναδικότητα. Το $A \times B \times B$ έχει μία συνιστώσα παραπάνω που οι προβολές δεν την ελέγχουν.

5 Μοναδικότητα ως προς ισομορφισμό

Αν ορίσουμε ένα αντικείμενο με καθολική ιδιότητα, δεν το ορίσαμε με τρόπο που να δίνει ένα μόνο αντικείμενο. Για παράδειγμα, τα $A \times B$ και $B \times A$ είναι δύο διαφορετικά σύνολα ζευγών, και όμως το δεύτερο, με προβολές $(b, a) \mapsto a$ και $(b, a) \mapsto b$, ικανοποιεί την ίδια καθολική ιδιότητα για το ζεύγος A, B . Ισχύει το εξής.

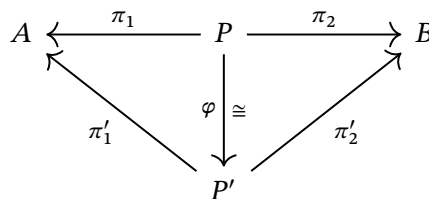
Πρόταση 5.1 (Μοναδικότητα του γινομένου). Αν (P, π_1, π_2) και (P', π'_1, π'_2) είναι δύο γινόμενα των A και B στην $\mathcal{C}$, τότε υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός $\varphi : P \rightarrow P'$ με $\pi'_1 \circ \varphi = \pi_1$ και $\pi'_2 \circ \varphi = \pi_2$.⁵

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την καθολική ιδιότητα του P' στο $C = P$ με $f = \pi_1$ και $g = \pi_2$. Παίρνουμε μοναδικό $\varphi : P \rightarrow P'$ με $\pi'_1 \circ \varphi = \pi_1$ και $\pi'_2 \circ \varphi = \pi_2$. Συμμετρικά, η καθολική ιδιότητα του P στο $C = P'$ δίνει μοναδικό $\psi : P' \rightarrow P$ με $\pi_1 \circ \psi = \pi'_1$ και $\pi_2 \circ \psi = \pi'_2$.

Η σύνθεση $\psi \circ \varphi : P \rightarrow P$ ικανοποιεί

$$\pi_1 \circ (\psi \circ \varphi) = (\pi_1 \circ \psi) \circ \varphi = \pi'_1 \circ \varphi = \pi_1,$$

και ομοίως $\pi_2 \circ (\psi \circ \varphi) = \pi_2$. Όμως και η ταυτοτική id_P ικανοποιεί τις ίδιες δύο ισότητες. Από τη μοναδικότητα στην καθολική ιδιότητα του P (με $C = P$, $f = \pi_1$, $g = \pi_2$) έπεται ότι $\psi \circ \varphi = \text{id}_P$. Ομοίως $\varphi \circ \psi = \text{id}_{P'}$. Άρα ο φ είναι ισομορφισμός. $\square$



⁴Βλ. ενότητα 8.4 του βιβλίου μας.

⁵Βλ. ενότητα 8.4 του βιβλίου μας.

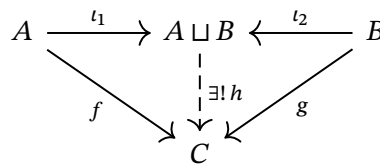
Το γινόμενο δεν καθορίζεται ως συγκεκριμένο αντικείμενο, αλλά είναι μοναδικό μόνο ως προς ισομορφισμό. Δύο οποιεσδήποτε εκδοχές του συνδέονται με ισομορφισμό που σέβεται τις προβολές. Για τον λόγο αυτό μιλάμε για το γινόμενο και γράφουμε $A \times B$. Κάθε ιδιότητα που διατυπώνεται αποκλειστικά με βέλη ισχύει για το ένα γινόμενο αν και μόνο αν ισχύει για το άλλο.

Βασική ιδέα

Ένα αντικείμενο που ικανοποιεί μια καθολική ιδιότητα είναι μοναδικό ως προς ισομορφισμό. Η απόδειξη της πρότασης δεν χρησιμοποίησε τίποτα από το τι είναι το γινόμενο, παρά μόνο την ίδια την ιδιότητα. Γι' αυτό ισχύει για κάθε κατασκευή που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο.

6 Το συν-γινόμενο, με αντεστραμμένα βέλη

Αν αντιστρέψουμε τα βέλη στον ορισμό του γινομένου, παίρνουμε μια άλλη καθολική ιδιότητα. Στα σύνολα, η ξένη ένωση $A \sqcup B = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$ έχει δύο εγκλεισμούς $\iota_1 : A \rightarrow A \sqcup B$ και $\iota_2 : B \rightarrow A \sqcup B$, με $\iota_1(a) = (a, 0)$ και $\iota_2(b) = (b, 1)$. Για κάθε σύνολο C και συναρτήσεις $f : A \rightarrow C$ και $g : B \rightarrow C$ υπάρχει μοναδική $h : A \sqcup B \rightarrow C$ με $h \circ \iota_1 = f$ και $h \circ \iota_2 = g$.



Αν γνωρίζουμε πού πηγαίνει κάθε στοιχείο του A και κάθε στοιχείο του B , γνωρίζουμε αυτόματα τη συνάρτηση σε ολόκληρη την ένωση.

Στη γενική περίπτωση, ένα **συν-γινόμενο** (coproduct) των A και B σε μια κατηγορία είναι ένα αντικείμενο Q με μορφισμούς $\iota_1 : A \rightarrow Q$ και $\iota_2 : B \rightarrow Q$ τέτοιο ώστε για κάθε C και κάθε ζεύγος $f : A \rightarrow C$, $g : B \rightarrow C$ να υπάρχει μοναδικός $h : Q \rightarrow C$ με $h \circ \iota_1 = f$ και $h \circ \iota_2 = g$. Γράφουμε $Q = A + B$ και $h = [f, g]$.⁶

Αυτό είναι ακριβώς ο ορισμός του γινομένου στην αντίθετη κατηγορία $\mathcal{C}^{\text{op}}$, όπου κάθε βέλος έχει αντιστραφεί.⁷ Έτσι, κάθε θεώρημα για γινόμενα δίνει αμέσως ένα θεώρημα για συν-γινόμενα, με αντεστραμμένα βέλη στην απόδειξη. Η Πρόταση 5.1 δίνει, για παράδειγμα, ότι και το συν-γινόμενο είναι μοναδικό ως προς ισομορφισμό.

γινόμενο	συν-γινόμενο
προβολές π_1, π_2	εγκλεισμοί ι_1, ι_2
μορφισμός $\langle f, g \rangle : C \rightarrow A \times B$	μορφισμός $[f, g] : A + B \rightarrow C$
καρτεσιανό γινόμενο στα σύνολα	ξένη ένωση στα σύνολα
ευθύ γινόμενο στις ομάδες	ελεύθερο γινόμενο στις ομάδες

Η τελευταία γραμμή του πίνακα δείχνει πόσο διαφορετικές μπορεί να είναι οι δύο κατασκευές στο ίδιο περιβάλλον. Στις ομάδες το $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ είναι η αβελιανή ομάδα $\mathbb{Z}^2$, ενώ το συν-γινόμενο $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ είναι η ελεύθερη ομάδα με δύο γεννήτορες, που δεν είναι αβελιανή.⁸ Ο ίδιος κανόνας, εφαρμοσμένος προς δύο αντίθετες κατευθύνσεις, δίνει δύο πολύ διαφορετικές ομάδες.

⁶Βλ. ενότητες 8.5 και 8.7 του βιβλίου μας.

⁷Βλ. ενότητα 8.6 του βιβλίου μας.

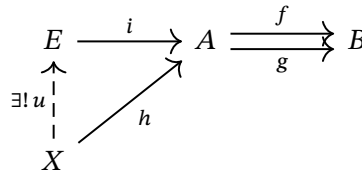
⁸Βλ. υποενότητα 8.8.2 του βιβλίου μας.

7 Ένα ακόμη παράδειγμα, ο εξισωτής

Το γινόμενο δεν είναι η μόνη καθολική κατασκευή. Ας δούμε μια διαφορετική, που δεν έχει σχέση με ζεύγη αντικειμένων. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g : A \rightarrow B$. Ζητάμε το μεγαλύτερο υποσύνολο του A στο οποίο οι f και g συμφωνούν,

$$E = \{ a \in A \mid f(a) = g(a) \},$$

με την εμφύτευση $i : E \rightarrow A$. Ισχύει $f \circ i = g \circ i$, και το E έχει την εξής ιδιότητα. Για κάθε σύνολο X και κάθε συνάρτηση $h : X \rightarrow A$ με $f \circ h = g \circ h$ υπάρχει μοναδική $u : X \rightarrow E$ ώστε $i \circ u = h$.



Η ύπαρξη ισχύει γιατί για κάθε x έχουμε $f(h(x)) = g(h(x))$, άρα το $h(x)$ ανήκει στο E και μπορούμε να ορίσουμε $u(x) = h(x)$. Η μοναδικότητα ισχύει γιατί η εμφύτευση i είναι έρριψη, οπότε από την ισότητα $i(u(x)) = h(x)$ το $u(x)$ προσδιορίζεται μονοσήμαντα και είναι το $h(x)$. Το E λέγεται **εξισωτής** (equalizer) των f και g .⁹

Στο παράδειγμα $A = B = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ και $g(x) = 2x - 1$, ο εξισωτής είναι το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $x^2 = 2x - 1$, δηλαδή το $\{1\}$. Μια συνάρτηση $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ εξισώνει τις f και g ακριβώς όταν έχει σταθερή τιμή 1, και τότε περνά μοναδικά από το $\{1\}$.

Βλέπουμε ότι ο εξισωτής ακολουθεί το ίδιο σχήμα με το γινόμενο. Έχουμε ένα αντικείμενο με ένα βέλος προς το αρχικό διάγραμμα, και κάθε άλλο αντικείμενο με βέλος που σέβεται τη συνθήκη περνά μοναδικά από αυτό. Αυτό που αλλάζει από περίπτωση σε περίπτωση είναι το διάγραμμα από το οποίο ξεκινάμε και η συνθήκη που ζητάμε από τα βέλη εισόδου. Στο γινόμενο το διάγραμμα αποτελείται από δύο αντικείμενα και καμία συνθήκη. Στον εξισωτή αποτελείται από δύο παράλληλα βέλη και τη συνθήκη $f \circ h = g \circ h$. Στο pullback, που εξετάζουμε σε χωριστή σημείωση, αποτελείται από δύο βέλη με κοινό στόχο.¹⁰ Όλες αυτές οι κατασκευές είναι περιπτώσεις μιας γενικής έννοιας, των ορίων, που τα συναντάμε στο κεφάλαιο 10 του βιβλίου.

8 Σύνοψη

- Μια καθολική ιδιότητα ορίζει ένα αντικείμενο από τον τρόπο που σχετίζεται με όλα τα άλλα αντικείμενα, και όχι από το τι περιέχει.
- Το γινόμενο $A \times B$ έχει δύο προβολές, και κάθε ζεύγος βελών από ένα αντικείμενο C προς τα A και B περνά μοναδικά από αυτό.
- Η ύπαρξη και η μοναδικότητα του μορφισμού είναι και οι δύο απαραίτητες. Το $A \times B \times B$ έχει ύπαρξη χωρίς μοναδικότητα και δεν είναι γινόμενο.
- Ένα αντικείμενο που ικανοποιεί μια καθολική ιδιότητα είναι μοναδικό ως προς ισομορφισμό που σέβεται τα βέλη της ιδιότητας.
- Αντιστρέφοντας τα βέλη παίρνουμε το συν-γινόμενο. Στα σύνολα είναι η ξένη ένωση και στις ομάδες το ελεύθερο γινόμενο.

⁹Βλ. ενότητα 9.2 του βιβλίου μας.

¹⁰Βλ. ενότητα 9.4 του βιβλίου μας.

- Ο εξισωτής και το pullback ακολουθούν το ίδιο σχήμα με διαφορετικό διάγραμμα, και όλα μαζί είναι ειδικές περιπτώσεις των ορίων.