

Ο δυϊκός χώρος και η φυσικότητα

Από τη Γραμμική Άλγεβρα στη Θεωρία Κατηγοριών

Σημειώσεις που συνοδεύουν το βιβλίο «Εισαγωγή στη Θεωρία Κατηγοριών» των εκδόσεων ΔΙΑΥΛΟΣ.

Σεπτέμβριος 2026

Ο δυϊκός χώρος ενός διανυσματικού χώρου ορίζεται με τα στοιχειώδη μέσα της Γραμμικής Άλγεβρας, και όμως οδηγεί σε τρεις έννοιες της Θεωρίας Κατηγοριών. Ο δυϊκός είναι ανταλλοίωτος συναρτητής. Η ταύτιση ενός χώρου πεπερασμένης διάστασης με τον διπλό δυϊκό του είναι φυσικός ισομορφισμός. Η δυϊκότητα οργανώνεται κατηγορικά μέσω μιας προσάρτησης.

Τι προϋποθέτουμε. Από τη Γραμμική Άλγεβρα χρειαζόμαστε τις έννοιες του διανυσματικού χώρου, της γραμμικής απεικόνισης, της βάσης και της διάστασης. Χρειαζόμαστε επίσης το γεγονός ότι μια γραμμική απεικόνιση ορίζεται πλήρως από τις τιμές της σε μια βάση, και ότι τις τιμές αυτές μπορούμε να τις επιλέξουμε αυθαίρετα.¹ Από τη Θεωρία Κατηγοριών χρειαζόμαστε τις έννοιες της κατηγορίας, του συναρτητή, του φυσικού μετασχηματισμού και της προσάρτησης, όπως τις παρουσιάζουμε στο βιβλίο μας «Εισαγωγή στη Θεωρία Κατηγοριών», στα κεφάλαια 3, 5, 6 και 13.² Σε κάθε σημείο του κειμένου όπου χρησιμοποιούμε μια κατηγορική έννοια παραπέμπουμε στην αντίστοιχη ενότητα του βιβλίου. Σε όλο το κείμενο το $\mathbb{F}$ είναι ένα σταθερό σώμα, για παράδειγμα το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$, και ο όρος «γραμμικός» σημαίνει « $\mathbb{F}$ -γραμμικός». Με $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$ συμβολίζουμε την κατηγορία των διανυσματικών χώρων πάνω από το $\mathbb{F}$ και των γραμμικών απεικονίσεων, και με $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}^{\text{fd}}$ την πλήρη υποκατηγορία των χώρων πεπερασμένης διάστασης.

1 Ο δυϊκός χώρος

Στον $\mathbb{R}^2$ η απεικόνιση $\varphi(x, y) = 3x - 2y$ παίρνει ένα διάνυσμα και επιστρέφει έναν αριθμό, και είναι γραμμική. Το ίδιο ισχύει για την $\varphi(x, y) = x$, που διαβάζει την πρώτη συντεταγμένη. Στον χώρο $\mathbb{R}[x]$ των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές, οι απεικονίσεις $p \mapsto p(2)$ και $p \mapsto \int_0^1 p(t) dt$ είναι επίσης γραμμικές και επιστρέφουν αριθμό.

Όλες οι γραμμικές απεικονίσεις $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ έχουν τη μορφή

$$\varphi(x, y) = ax + by, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Πράγματι, γράφουμε $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$ και από τη γραμμικότητα παίρνουμε

$$\varphi(x, y) = x\varphi(1, 0) + y\varphi(0, 1).$$

Αρκεί λοιπόν να θέσουμε $a = \varphi(1, 0)$ και $b = \varphi(0, 1)$. Η φ καθορίζεται πλήρως από το ζεύγος αριθμών (a, b) .

Το σύνολο όλων αυτών των απεικονίσεων έχει δική του δομή, και το ορίζουμε για τυχόντα διανυσματικό χώρο.

Ορισμός 1.1 (Δυϊκός χώρος). Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{F}$. Ένα **γραμμικό συναρτησοειδές** (*linear functional*) στον V είναι μια γραμμική απεικόνιση $\varphi : V \rightarrow \mathbb{F}$. Ο **δυϊκός χώρος** του V είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συναρτησοειδών στον V ,

$$V^* = \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{F}) = \{\varphi : V \rightarrow \mathbb{F} \mid \varphi \text{ γραμμική}\}.$$

¹Βλ. ενότητες 3.5, 3.6 των K. Hoffman και R. Kunze, *Linear Algebra*, 2η έκδοση, Prentice-Hall, 1971 και ενότητα 3F του S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, 4η έκδοση, Springer, 2024.

²Για την προσάρτηση βλ. και τις σημειώσεις «Η προσάρτηση» της ίδιας σειράς.

Ένα στοιχείο του V^* είναι λοιπόν μια γραμμική απεικόνιση που παίρνει ένα διάνυσμα και επιστρέφει ένα βαθμωτό. Για $V = \mathbb{R}^2$ το προηγούμενο παράδειγμα δείχνει ότι ο V^* περιγράφεται από τα ζεύγη (a, b) .

Η δομή διανυσματικού χώρου στον δυϊκό

Ο V^* είναι και ο ίδιος διανυσματικός χώρος, με πράξεις που ορίζονται σημείο προς σημείο. Για $\varphi, \psi \in V^*$ και $\lambda \in \mathbb{F}$ θέτουμε

$$(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v), \quad (\lambda\varphi)(v) = \lambda\varphi(v).$$

Οι απεικονίσεις $\varphi + \psi$ και $\lambda\varphi$ είναι γραμμικές. Για παράδειγμα, για $v, w \in V$ και $\mu \in \mathbb{F}$ έχουμε

$$(\varphi + \psi)(v + \mu w) = \varphi(v) + \mu\varphi(w) + \psi(v) + \mu\psi(w) = (\varphi + \psi)(v) + \mu(\varphi + \psi)(w).$$

Τα αξιώματα του διανυσματικού χώρου ισχύουν στον V^* επειδή ισχύουν στο $\mathbb{F}$. Το μηδενικό στοιχείο είναι το μηδενικό συναρτησοειδές.

Πρόταση 1.2 (Δυϊκή βάση). Έστω V διανυσματικός χώρος διάστασης n και $\{e_1, \dots, e_n\}$ μια βάση του. Για κάθε $i = 1, \dots, n$ υπάρχει μοναδικό $e^i \in V^*$ με

$$e^i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Τα $e^1, \dots, e^n$ αποτελούν βάση του V^* , που ονομάζεται **δυϊκή βάση**, και για κάθε $\varphi \in V^*$ ισχύει

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e^i.$$

Ειδικότερα, $\dim V^* = \dim V$.

Απόδειξη. Ύπαρξη των e^i . Επειδή το $\{e_1, \dots, e_n\}$ είναι βάση, κάθε $v \in V$ γράφεται ως $v = \sum_{j=1}^n c_j e_j$ με μοναδικούς συντελεστές $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$. Η ύπαρξη των συντελεστών προκύπτει από το ότι η βάση παράγει τον V και η μοναδικότητά τους από το ότι η βάση είναι γραμμικά ανεξάρτητη. Η μοναδικότητα είναι αυτή που μας επιτρέπει να ορίσουμε

$$e^i(v) = c_i, \quad v = \sum_{j=1}^n c_j e_j.$$

Αν η αντιστοίχιση αυτή δεν έδινε μία μόνο τιμή για κάθε v , δεν θα ήταν απεικόνιση. Στον $\mathbb{R}^2$ με την κανονική βάση ο ορισμός δίνει $e^1(x, y) = x$, αφού $(x, y) = x e_1 + y e_2$.

Η e^i είναι γραμμική. Έστω $v = \sum_j c_j e_j$, $w = \sum_j d_j e_j$ και $\lambda \in \mathbb{F}$. Τότε

$$v + \lambda w = \sum_{j=1}^n (c_j + \lambda d_j) e_j,$$

και αυτή είναι η γραφή του $v + \lambda w$ στη βάση. Λόγω της μοναδικότητας των συντελεστών, ο i -οστός συντελεστής του $v + \lambda w$ είναι ο $c_i + \lambda d_i$. Άρα $e^i(v + \lambda w) = c_i + \lambda d_i = e^i(v) + \lambda e^i(w)$.

Τέλος υπολογίζουμε την e^i στα στοιχεία της βάσης. Το e_j γράφεται ως $e_j = \sum_k \delta_{kj} e_k$, δηλαδή έχει συντελεστή 1 στη θέση j και 0 σε όλες τις άλλες. Επομένως $e^i(e_j) = \delta_{ij}$.

Μοναδικότητα των e^i . Έστω $\varphi, \psi : V \rightarrow \mathbb{F}$ γραμμικές απεικονίσεις με $\varphi(e_j) = \psi(e_j) = \delta_{ij}$ για κάθε j . Η διαφορά $\chi = \varphi - \psi$ είναι γραμμική και μηδενίζεται σε κάθε e_j . Για τυχόν $v = \sum_j c_j e_j$ η γραμμικότητα δίνει

$$\chi(v) = \sum_{j=1}^n c_j \chi(e_j) = 0.$$

Άρα $\chi = 0$, δηλαδή $\varphi = \psi$. Μια γραμμική απεικόνιση που ορίζεται στον V καθορίζεται λοιπόν πλήρως από τις τιμές της στη βάση, και αυτό ακριβώς χρησιμοποιούμε εδώ. Η ύπαρξη, που αποδείξαμε παραπάνω, δείχνει ότι οι τιμές στη βάση μπορούν επιπλέον να επιλεγούν αυθαίρετα.

Ο τύπος για το φ και η παραγωγή του V^* . Έστω $\varphi \in V^*$ και έστω $\psi = \sum_i \varphi(e_i) e^i \in V^*$. Για κάθε j έχουμε

$$\psi(e_j) = \sum_i \varphi(e_i) e^i(e_j) = \sum_i \varphi(e_i) \delta_{ij} = \varphi(e_j).$$

Τα φ και ψ είναι γραμμικές απεικονίσεις που συμφωνούν σε μια βάση του V , άρα $\varphi = \psi$. Αυτό δίνει τον τύπο, και δείχνει επιπλέον ότι κάθε $\varphi \in V^*$ είναι γραμμικός συνδυασμός των e^i .

Γραμμική ανεξαρτησία. Αν $\sum_i c_i e^i = 0$, τότε υπολογίζοντας στο e_j παίρνουμε $0 = \sum_i c_i e^i(e_j) = c_j$ για κάθε j . $\square$

Παρατήρηση 1.3. Το συναρτησοειδές e^i δεν εξαρτάται μόνο από το e_i αλλά από ολόκληρη τη βάση. Στον $\mathbb{R}^2$ έστω $e_1 = (1, 0)$ και $e_2 = (0, 1)$, και έστω η άλλη βάση $e'_1 = (1, 0)$, $e'_2 = (1, 1)$. Τότε $e^1(x, y) = x$ και $e^2(x, y) = y$, ενώ η δυϊκή βάση της δεύτερης βάσης είναι $e'^1(x, y) = x - y$ και $e'^2(x, y) = y$. Πράγματι, από την ισότητα $(x, y) = a e'_1 + b e'_2 = (a + b, b)$ βρίσκουμε $b = y$ και $a = x - y$, δηλαδή $(x, y) = (x - y) e'_1 + y e'_2$, και οι συντελεστές αυτοί είναι οι $e'^1(x, y)$ και $e'^2(x, y)$. Παρότι $e'_1 = e_1$, έχουμε $e'^1 \neq e^1$.

Μέχρι εδώ βρισκόμαστε εξ ολοκλήρου στη Γραμμική Άλγεβρα. Θα δούμε τι συμβαίνει όταν έχουμε μια γραμμική απεικόνιση $f : V \rightarrow W$ ανάμεσα σε δύο χώρους, και αν η f μεταφέρει τα συναρτησοειδή του ενός χώρου στον άλλον.

2 Η ανάστροφη απεικόνιση και ο δυϊκός ως συναρτητής

Η αντιστοίχιση $V \mapsto V^*$ επεκτείνεται και στις γραμμικές απεικονίσεις, με αντίστροφη φορά.

Ορισμός 2.1 (Ανάστροφη απεικόνιση). Έστω $f : V \rightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση. Η **ανάστροφη απεικόνιση** (*transpose*) της f είναι η $f^* : W^* \rightarrow V^*$ που στέλνει κάθε γραμμικό συναρτησοειδές $\varphi \in W^*$, δηλαδή κάθε γραμμική απεικόνιση $\varphi : W \rightarrow \mathbb{F}$, στη σύνθεση

$$f^*(\varphi) = \varphi \circ f : V \rightarrow \mathbb{F}.$$

Η f^* είναι καλά ορισμένη, γιατί αν $\varphi : W \rightarrow \mathbb{F}$ είναι γραμμική, τότε και η σύνθεση $\varphi \circ f : V \rightarrow \mathbb{F}$ είναι γραμμική. Η ίδια η f^* είναι γραμμική, γιατί

$$f^*(\varphi + \lambda\psi) = (\varphi + \lambda\psi) \circ f = \varphi \circ f + \lambda(\psi \circ f) = f^*(\varphi) + \lambda f^*(\psi).$$

Το συναρτησοειδές $f^*(\varphi)$ είναι η διαδρομή από το V στο $\mathbb{F}$ που φαίνεται στο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ & \searrow & \downarrow \varphi \\ & f^*(\varphi) & \mathbb{F} \end{array}$$

Γιατί η φορά αντιστρέφεται. Ένα στοιχείο $\varphi \in W^*$ δέχεται ως είσοδο διανύσματα του W . Για να πάρουμε από αυτό ένα συναρτησοειδές που δέχεται διανύσματα του V , πρέπει να μεταφέρουμε πρώτα ένα $v \in V$ στο W μέσω της f και μετά να εφαρμόσουμε την φ . Αν η f ήταν αντιστρέψιμη, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και την f^{-1} για να κινηθούμε προς την άλλη κατεύθυνση, αλλά γενικά δεν είναι.

Ως προς βάσεις, η f^* παριστάνεται από τον ανάστροφο πίνακα της f , και από αυτό προέρχεται το όνομά της.³

Πρόταση 2.2 (Ο πίνακας της ανάστροφης). Έστω $f : V \rightarrow W$ γραμμική απεικόνιση, $\{e_1, \dots, e_n\}$ βάση του V και $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$ βάση του W , και έστω $A = (a_{ij}) \in m \times n$ πίνακας της f , δηλαδή $f(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \varepsilon_i$. Τότε ο πίνακας της f^* ως προς τις δυϊκές βάσεις $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^m\}$ και $\{e^1, \dots, e^n\}$ είναι ο ανάστροφος πίνακας A^T .

Απόδειξη. Από την Πρόταση 1.2 εφαρμοσμένη στο συναρτησοειδές $f^*(\varepsilon^k) \in V^*$ έχουμε $f^*(\varepsilon^k) = \sum_j f^*(\varepsilon^k)(e_j) e^j$. Ο συντελεστής του e^j είναι

$$f^*(\varepsilon^k)(e_j) = \varepsilon^k(f(e_j)) = \varepsilon^k\left(\sum_i a_{ij} \varepsilon_i\right) = a_{kj}.$$

Άρα $f^*(\varepsilon^k) = \sum_{j=1}^n a_{kj} e^j$. Η k -οστή στήλη του πίνακα της f^* έχει λοιπόν στοιχεία $a_{k1}, \dots, a_{kn}$, δηλαδή είναι η k -οστή γραμμή του A . $\square$

Παράδειγμα 2.3. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $f(x, y, z) = (x + 2y, 3y - z)$. Ως προς τις κανονικές βάσεις έχουμε $f(e_1) = (1, 0)$, $f(e_2) = (2, 3)$ και $f(e_3) = (0, -1)$, άρα ο πίνακας της f είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Το ε^1 διαβάζει την πρώτη συντεταγμένη του $\mathbb{R}^2$, άρα $f^*(\varepsilon^1) = \varepsilon^1 \circ f$ είναι το συναρτησοειδές $(x, y, z) \mapsto x + 2y$, δηλαδή $f^*(\varepsilon^1) = e^1 + 2e^2$. Ομοίως $f^*(\varepsilon^2)$ είναι το $(x, y, z) \mapsto 3y - z$, δηλαδή $f^*(\varepsilon^2) = 3e^2 - e^3$. Οι στήλες του πίνακα της f^* είναι λοιπόν οι $(1, 2, 0)$ και $(0, 3, -1)$, και ο πίνακας είναι

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A^T.$$

Η ανάστροφη αντιστρέφει τη σειρά της σύνθεσης.

Πρόταση 2.4. (i) Αν $f : V \rightarrow W$ και $g : W \rightarrow U$ είναι γραμμικές απεικονίσεις, τότε

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

(ii) $(\text{id}_V)^* = \text{id}_{V^*}$.

Απόδειξη. (i) Οι δύο πλευρές είναι απεικονίσεις $U^* \rightarrow V^*$. Για κάθε $\varphi \in U^*$ έχουμε

$$(g \circ f)^*(\varphi) = \varphi \circ (g \circ f) = (\varphi \circ g) \circ f = f^*(g^*(\varphi)) = (f^* \circ g^*)(\varphi).$$

(ii) Για κάθε $\varphi \in V^*$ είναι $(\text{id}_V)^*(\varphi) = \varphi \circ \text{id}_V = \varphi$. $\square$

³Για τη σχέση πινάκων και γραμμικών απεικονίσεων από κατηγορική σκοπιά βλ. την κατηγορία $\mathbf{Mat}_{\mathbb{F}}$ στην ενότητα 4.1 του βιβλίου μας.

Ο δυϊκός ως ανταλλοίωτος συναρτητής

Η Πρόταση 2.4 λέει ότι η αντιστοίχιση $V \mapsto V^*$, $f \mapsto f^*$ διατηρεί ταυτοτικούς μορφισμούς και συνθέσεις, με την προσοχή ότι οι συνθέσεις αντιστρέφονται. Αυτό είναι ακριβώς ένας **ανταλλοίωτος συναρτητής** από την $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$ στην $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$.⁴ Για να τον δούμε ως συναρτητή με τη συνήθη έννοια, χρησιμοποιούμε την αντίθετη κατηγορία $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}^{\text{op}}$.⁵ Έχει τα ίδια αντικείμενα με την $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$, και σε κάθε γραμμική απεικόνιση $f: W \rightarrow V$ αντιστοιχεί ένας μορφισμός $f^{\text{op}}: V \rightarrow W$ της $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}^{\text{op}}$, με την αντίθετη φορά. Η σύνθεση στην $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}^{\text{op}}$ είναι η σύνθεση της $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$ με αντίστροφη σειρά. Αν $f: W \rightarrow V$ και $g: U \rightarrow W$, τότε

$$g^{\text{op}} \circ^{\text{op}} f^{\text{op}} = (f \circ g)^{\text{op}}: V \rightarrow U.$$

Ο συναρτητής

$$D: \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}, \quad V \longmapsto V^*, \quad f^{\text{op}} \longmapsto f^*,$$

στέλνει τον μορφισμό $f^{\text{op}}: V \rightarrow W$, δηλαδή τη γραμμική απεικόνιση $f: W \rightarrow V$, στη γραμμική απεικόνιση $f^*: V^* \rightarrow W^*$, που έχει την ίδια φορά με τον f^{op} . Από την Πρόταση 2.4(i) έχουμε

$$D(g^{\text{op}} \circ^{\text{op}} f^{\text{op}}) = D((f \circ g)^{\text{op}}) = (f \circ g)^* = g^* \circ f^* = D(g^{\text{op}}) \circ D(f^{\text{op}}),$$

δηλαδή ο D διατηρεί τη σύνθεση, και από την Πρόταση 2.4(ii) διατηρεί τους ταυτοτικούς μορφισμούς. Στη συνέχεια γράφουμε απλώς $(-)^*$ για τον D .

3 Ο διπλός δυϊκός

Μπορούμε να εφαρμόσουμε την ίδια κατασκευή στον δυϊκό χώρο.

Ορισμός 3.1 (Διπλός δυϊκός). Ο **διπλός δυϊκός** ενός χώρου V είναι ο $V^{**} = (V^*)^*$. Για μια γραμμική απεικόνιση $f: V \rightarrow W$ ορίζουμε $f^{**} = (f^*)^*: V^{**} \rightarrow W^{**}$. Αν $\xi \in V^{**}$, δηλαδή $\xi: V^* \rightarrow \mathbb{F}$ γραμμική, τότε

$$f^{**}(\xi) = \xi \circ f^*.$$

Τα στοιχεία του V^{**} είναι δηλαδή γραμμικά συναρτησοειδή που δέχονται ως είσοδο γραμμικά συναρτησοειδή του V . Επειδή η φορά αντιστρέφεται δύο φορές, η f^{**} έχει την ίδια φορά με την f . Από την Πρόταση 2.4(i) έχουμε

$$(g \circ f)^{**} = ((g \circ f)^*)^* = (f^* \circ g^*)^* = g^{**} \circ f^{**},$$

και ομοίως $(\text{id}_V)^{**} = \text{id}_{V^{**}}$. Άρα η αντιστοίχιση $V \mapsto V^{**}$, $f \mapsto f^{**}$ είναι **συναλλοίωτος συναρτητής** $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$.

Η απεικόνιση αξιολόγησης

Πώς παίρνουμε στοιχεία του V^{**} από διανύσματα του V ; Έστω $V = \mathbb{R}^2$ και $v = (2, 3)$. Κάθε συναρτησοειδές $\varphi \in V^*$ δίνει έναν αριθμό $\varphi(v)$. Για $\varphi_1(x, y) = 3x + 5y$ και $\varphi_2(x, y) = -2x + y$ παίρνουμε

$$\varphi_1(v) = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 21, \quad \varphi_2(v) = -2 \cdot 2 + 3 = -1,$$

και για τη δυϊκή βάση $e^1(x, y) = x$, $e^2(x, y) = y$ παίρνουμε $e^1(v) = 2$ και $e^2(v) = 3$. Το v ορίζει λοιπόν έναν κανόνα που στέλνει κάθε στοιχείο του V^* σε έναν αριθμό. Ο κανόνας αυτός είναι γραμμικός ως προς φ , δηλαδή είναι ένα στοιχείο του V^{**} .

⁴Βλ. ενότητα 5.4 του βιβλίου μας, όπου ο δυϊκός χώρος δίνεται ως παράδειγμα ανταλλοίωτου συναρτητή.

⁵Βλ. ενότητα 3.7 του βιβλίου μας.

Ας το διατυπώσουμε για τυχόντα χώρο V . Για κάθε $v \in V$ ορίζουμε το $\text{ev}_V(v) : V^* \rightarrow \mathbb{F}$ θέτοντας

$$\text{ev}_V(v)(\varphi) = \varphi(v).$$

Το $\text{ev}_V(v)$ είναι γραμμικό ως προς φ , γιατί από τον ορισμό των πράξεων του V^* έχουμε

$$\text{ev}_V(v)(\varphi + \lambda\psi) = (\varphi + \lambda\psi)(v) = \varphi(v) + \lambda\psi(v) = \text{ev}_V(v)(\varphi) + \lambda \text{ev}_V(v)(\psi).$$

Επιπλέον η απεικόνιση $\text{ev}_V : V \rightarrow V^{**}$ που προκύπτει είναι γραμμική ως προς v , γιατί, αφού κάθε φ είναι γραμμικό,

$$\text{ev}_V(v + \lambda w)(\varphi) = \varphi(v + \lambda w) = \varphi(v) + \lambda\varphi(w) = (\text{ev}_V(v) + \lambda \text{ev}_V(w))(\varphi).$$

Η ev_V ονομάζεται **απεικόνιση αξιολόγησης** (*evaluation map*).

Διαισθητική εικόνα

Η έκφραση $\varphi(v)$ εξαρτάται από δύο ορίσματα, το $\varphi \in V^*$ και το $v \in V$. Αν κρατήσουμε σταθερό το v και αφήσουμε το φ να μεταβάλλεται, παίρνουμε ένα γραμμικό συναρτησοειδές στον V^* , δηλαδή ένα στοιχείο του V^{**} . Αυτό είναι το $\text{ev}_V(v)$. Οι ρόλοι του φ και του v ανταλλάσσονται.

Παράδειγμα 3.2 (Οι συντεταγμένες του $\text{ev}_V(v)$ στον $\mathbb{R}^2$). Έστω $V = \mathbb{R}^2$ και $v = (2, 3)$ όπως πριν. Από τη γραμμικότητα προκύπτει $\text{ev}_V(v)(ae^1 + be^2) = 2a + 3b$. Τα $\text{ev}_V(e_1)$ και $\text{ev}_V(e_2)$ αποτελούν τη δυϊκή βάση της $\{e^1, e^2\}$, γιατί $\text{ev}_V(e_i)(e^j) = e^j(e_i) = \delta_{ij}$. Ως προς αυτή τη βάση του V^{**} ισχύει $\text{ev}_V(v) = 2 \text{ev}_V(e_1) + 3 \text{ev}_V(e_2)$. Οι συντεταγμένες του $\text{ev}_V(v)$ είναι λοιπόν οι $(2, 3)$, ίδιες με τις συντεταγμένες του v .

Ένα χαρακτηριστικό της ev_V είναι ότι ο ορισμός της δεν απαιτεί καμία επιλογή, ούτε βάσης ούτε άλλης βοηθητικής δομής. Η ιδιότητα που εκφράζει αυτή την ανεξαρτησία με ακριβή τρόπο είναι η φυσικότητα.

Πρόταση 3.3 (Φυσικότητα της αξιολόγησης). Για κάθε γραμμική απεικόνιση $f : V \rightarrow W$ το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \text{ev}_V \downarrow & & \downarrow \text{ev}_W \\ V^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & W^{**} \end{array}$$

αντιμετατίθεται, δηλαδή $\text{ev}_W \circ f = f^{**} \circ \text{ev}_V$.

Απόδειξη. Οι δύο πλευρές είναι απεικονίσεις $V \rightarrow W^{**}$. Έστω $v \in V$. Αρκεί να δείξουμε ότι τα στοιχεία $\text{ev}_W(f(v))$ και $f^{**}(\text{ev}_V(v))$ του W^{**} συμφωνούν σε κάθε $\varphi \in W^*$. Από τον ορισμό της ev_W έχουμε

$$\text{ev}_W(f(v))(\varphi) = \varphi(f(v)).$$

Από την άλλη πλευρά, χρησιμοποιώντας διαδοχικά τον ορισμό της f^{**} , της f^* και της ev_V , έχουμε

$$f^{**}(\text{ev}_V(v))(\varphi) = \text{ev}_V(v)(f^*(\varphi)) = \text{ev}_V(v)(\varphi \circ f) = (\varphi \circ f)(v) = \varphi(f(v)).$$

Τα δύο αποτελέσματα ταυτίζονται. □

4 Ο ισομορφισμός με τον διπλό δυϊκό σε πεπερασμένη διάσταση

Θεώρημα 4.1. Αν ο V έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε η $\text{ev}_V : V \rightarrow V^{**}$ είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Έστω $n = \dim V$. Η ev_V είναι γραμμική, όπως είδαμε στην ενότητα 3.

Η ev_V είναι μονομορφισμός. Αρκεί να δείξουμε ότι ο πυρήνας της είναι μηδενικός. Έστω $v \in V$ με $\text{ev}_V(v) = 0$, δηλαδή $\varphi(v) = 0$ για κάθε $\varphi \in V^*$. Υποθέτουμε ότι $v \neq 0$. Τότε το $\{v\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και, αφού ο V έχει πεπερασμένη διάσταση, επεκτείνεται σε μια βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του V με $e_1 = v$. Για το πρώτο στοιχείο e^1 της δυϊκής βάσης (Πρόταση 1.2) έχουμε $e^1(v) = 1 \neq 0$, που είναι αντίφαση. Άρα $v = 0$.

Οι διαστάσεις συμπίπτουν. Από την Πρόταση 1.2 έχουμε $\dim V^* = n$, και εφαρμόζοντάς την ξανά στον V^* παίρνουμε $\dim V^{**} = n$.

Συμπέρασμα. Από τη σχέση $\dim V = \dim \ker \text{ev}_V + \dim \text{im } \text{ev}_V$ η εικόνα της ev_V έχει διάσταση $n - 0 = n = \dim V^{**}$, άρα συμπίπτει με τον V^{**} . Η ev_V είναι λοιπόν μονομορφισμός και επί, δηλαδή ισομορφισμός. $\square$

Παρατήρηση 4.2. Στην απόδειξη χρησιμοποιήσαμε βάσεις, αλλά μόνο για να αποδείξουμε μια ιδιότητα της ev_V . Η ίδια η απεικόνιση ev_V ορίζεται χωρίς καμία βάση.

Παρατήρηση 4.3. Σε χώρους άπειρης διάστασης η Πρόταση 1.2 δεν ισχύει. Στον $\mathbb{R}[x]$ με βάση τα $1, x, x^2, \dots$ ορίζονται όπως πριν τα συναρτησοειδή e^n , όπου $e^n(p)$ είναι ο συντελεστής του x^n στο p . Το συναρτησοειδές $\sigma(p) = p(1)$, που δίνει το άθροισμα των συντελεστών του p , παίρνει την τιμή 1 σε κάθε x^n . Αν ήταν γραμμικός συνδυασμός $\sum_{n \leq N} c_n e^n$, θα ήταν $\sigma(x^{N+1}) = 0$, που είναι άτοπο. Τα e^n είναι λοιπόν γραμμικά ανεξάρτητα αλλά δεν παράγουν τον $\mathbb{R}[x]^*$, και ο δυϊκός είναι «μεγαλύτερος» από τον αρχικό χώρο.

Η ev_V εξακολουθεί να ορίζεται, αλλά δεν είναι επί. Η απόδειξη του γεγονότος αυτού, που δεν τη δίνουμε εδώ, χρησιμοποιεί το αξίωμα της επιλογής, που σε κατηγορική διατύπωση λέει ότι κάθε επί απεικόνιση συνόλων $p : X \rightarrow Y$ έχει δεξιό αντίστροφο, δηλαδή απεικόνιση $s : Y \rightarrow X$ με $p \circ s = \text{id}_Y$.⁶ Το αξίωμα εμπλέκεται μέσω της ύπαρξης βάσης σε κάθε διανυσματικό χώρο. Γι' αυτό περιοριζόμαστε εδώ σε χώρους πεπερασμένης διάστασης.

5 Φυσικός και μη φυσικός ισομορφισμός

Σε έναν χώρο V πεπερασμένης διάστασης έχουμε δύο ισομορφισμούς προς χώρους που κατασκευάζονται από τον V , τον $V \cong V^{**}$ και τον $V \cong V^*$. Οι δύο ισομορφισμοί δεν έχουν τον ίδιο χαρακτήρα. Ο ένας εξαρτάται από μια επιλογή και ο άλλος όχι.

Ο ισομορφισμός με τον δυϊκό προέρχεται από μια επιλογή

Έστω V διάστασης n και έστω $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ μια βάση του. Ορίζουμε τη γραμμική απεικόνιση $T_e : V \rightarrow V^*$ με $T_e(e_i) = e^i$ για κάθε i . Η T_e στέλνει μια βάση του V σε μια βάση του V^* , άρα είναι ισομορφισμός. Ο ισομορφισμός αυτός εξαρτάται από τη βάση.

Παράδειγμα 5.1. Στον $V = \mathbb{R}^2$ θεωρούμε τις βάσεις της Παρατήρησης 1.3. Για την πρώτη βάση έχουμε $T_e(e'_2) = T_e(e_1 + e_2) = e^1 + e^2$, δηλαδή $T_e(e'_2)(x, y) = x + y$. Για τη δεύτερη βάση έχουμε $T_{e'}(e'_2) = e'^2$, δηλαδή $T_{e'}(e'_2)(x, y) = y$. Οι T_e και $T_{e'}$ είναι διαφορετικοί ισομορφισμοί $\mathbb{R}^2 \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$.

⁶Βλ. T. Leinster, *Basic Category Theory*, Cambridge University Press, 2014, σ. 71.

Ένας άλλος τρόπος να ορίσουμε έναν ισομορφισμό $V \rightarrow V^*$ είναι να εφοδιάσουμε τον V με μια μη εκφυλισμένη διγραμμική μορφή $\langle \cdot, \cdot \rangle$, για παράδειγμα με ένα εσωτερικό γινόμενο όταν $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, και να θέσουμε $v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$.⁷ Και εδώ όμως χρησιμοποιούμε πρόσθετη δομή που δεν ανήκει στον απλό διανυσματικό χώρο.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις δείχνουν ότι οι συγκεκριμένοι ισομορφισμοί $V \rightarrow V^*$ που γνωρίζουμε εξαρτώνται από επιλογές. Αυτό δεν αποκλείει από μόνο του την ύπαρξη κάποιου άλλου ισομορφισμού που να μην εξαρτάται από καμία επιλογή. Η επόμενη πρόταση αποκλείει ακριβώς αυτό, αφού πρώτα διατυπώσουμε με ακρίβεια τι σημαίνει «φυσικός» για μια οικογένεια απεικονίσεων $V \rightarrow V^*$.

Τι θα σημαίνει φυσικός ισομορφισμός με τον δυϊκό

Ο ταυτοτικός συναρτητής είναι συναλλοίωτος ενώ ο $(-)^*$ είναι ανταλλοίωτος, οπότε δεν έχει νόημα να ζητήσουμε φυσικό μετασχηματισμό ανάμεσά τους για όλες τις γραμμικές απεικονίσεις. Μπορούμε όμως να περιοριστούμε στους ισομορφισμούς. Αν $f : V \rightarrow W$ είναι ισομορφισμός, τότε η $f^* : W^* \rightarrow V^*$ είναι επίσης ισομορφισμός, και η $(f^*)^{-1} : V^* \rightarrow W^*$ έχει την ίδια φορά με την f . Μια οικογένεια γραμμικών απεικονίσεων $T_V : V \rightarrow V^*$, μία για κάθε χώρο V πεπερασμένης διάστασης, είναι **φυσική ως προς τους ισομορφισμούς** αν για κάθε ισομορφισμό $f : V \rightarrow W$ ισχύει $T_W \circ f = (f^*)^{-1} \circ T_V$. Συνθέτοντας από αριστερά με την f^* , η συνθήκη αυτή γράφεται ισοδύναμα

$$f^* \circ T_W \circ f = T_V. \quad (1)$$

Επειδή ζητάμε φυσικότητα μόνο ως προς τους ισομορφισμούς, δηλαδή ασθενέστερη απαίτηση από τη φυσικότητα ως προς όλες τις απεικονίσεις, το επόμενο αποτέλεσμα είναι ισχυρότερο.

Πρόταση 5.2 (Μη ύπαρξη φυσικού ισομορφισμού $V \cong V^*$). Υποθέτουμε ότι το $\mathbb{F}$ έχει ένα στοιχείο λ με $\lambda^2 \neq 1$, για παράδειγμα $\lambda = 2$ όταν $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Η υπόθεση αποκλείει μόνο τα σώματα με δύο ή τρία στοιχεία, που δεν μας απασχολούν εδώ. Αν μια οικογένεια γραμμικών απεικονίσεων $T_V : V \rightarrow V^*$ ικανοποιεί την (1) για κάθε ισομορφισμό f , τότε $T_V = 0$ για κάθε V . Ειδικότερα, για κάθε $V \neq 0$ η T_V δεν είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Έστω V και έστω $f = \lambda \text{id}_V : V \rightarrow V$, που είναι ισομορφισμός με αντίστροφο $\lambda^{-1} \text{id}_V$ αφού $\lambda \neq 0$. Για $\varphi \in V^*$ έχουμε $f^*(\varphi) = \varphi \circ (\lambda \text{id}_V) = \lambda\varphi$, δηλαδή $f^* = \lambda \text{id}_{V^*}$. Εφαρμόζουμε την (1) με $W = V$, και για $v \in V$ παίρνουμε

$$T_V(v) = f^*(T_V(\lambda v)) = \lambda T_V(\lambda v) = \lambda^2 T_V(v).$$

Άρα $(\lambda^2 - 1) T_V(v) = 0$. Αφού $\lambda^2 - 1 \neq 0$, είναι $T_V(v) = 0$ για κάθε v , δηλαδή $T_V = 0$. Αν $V \neq 0$, η μηδενική απεικόνιση δεν είναι μονομορφισμός, άρα δεν είναι ισομορφισμός. $\square$

Παρατήρηση 5.3. Ας υποθέσουμε ότι σε κάθε χώρο V έχουμε επιλέξει μια μη εκφυλισμένη διγραμμική μορφή $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ και ότι $T_V(v) = \langle v, \cdot \rangle_V$. Τότε η (1) για έναν ισομορφισμό $f : V \rightarrow W$ σημαίνει ότι $\langle f v, f v' \rangle_W = \langle v, v' \rangle_V$ για κάθε $v, v' \in V$, δηλαδή ότι η f διατηρεί τις διγραμμικές μορφές. Ο ισομορφισμός που ορίζεται από μια διγραμμική μορφή είναι έτσι συμβατός μόνο με τις απεικονίσεις που τη διατηρούν, και όχι με όλους τους ισομορφισμούς. Η Πρόταση 5.2 λέει ότι δεν υπάρχει τρόπος να ξεπεράσουμε αυτόν τον περιορισμό.

⁷Όταν $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, ένα εσωτερικό γινόμενο δεν είναι γραμμικό και στα δύο ορίσματα, αφού σε ένα από αυτά οι βαθμωτοί βγαίνουν ως συζυγείς μιγαδικοί. Γι' αυτό η $v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$ δεν δίνει γραμμική απεικόνιση $V \rightarrow V^*$, και εδώ μιλάμε για διγραμμικές μορφές.

Ο ισομορφισμός με τον διπλό δυϊκό είναι φυσικός

Η ev_V χρησιμοποιεί μόνο την ίδια τη δομή του διανυσματικού χώρου. Δεν επιλέγουμε βάση, ούτε εσωτερικό γινόμενο, ούτε κάποια άλλη βοηθητική κατασκευή. Επιπλέον, από την Πρόταση 3.3, είναι συμβατή με κάθε γραμμική απεικόνιση, και όχι μόνο με τους ισομορφισμούς.

6 Η κατηγορική ερμηνεία

Ως τώρα χρησιμοποιήσαμε τη λέξη «φυσικός» με συγκεκριμένο περιεχόμενο. Η Θεωρία Κατηγοριών μάς επιτρέπει να το εκφράσουμε με ακρίβεια. Θυμίζουμε πρώτα τον ορισμό.⁸

Έστω $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ συναρτητές. Ένας **φυσικός μετασχηματισμός** $\eta : F \Rightarrow G$ είναι μια οικογένεια μορφισμών $\eta_A : F(A) \rightarrow G(A)$ της $\mathcal{D}$, ένας για κάθε αντικείμενο A της $\mathcal{C}$, με την ιδιότητα που περιγράφουμε παρακάτω.

Ας θεωρήσουμε έναν μορφισμό $f : A \rightarrow B$ στην $\mathcal{C}$. Ο F τον αντιστοιχίζει στο $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$ και ο G στο $G(f) : G(A) \rightarrow G(B)$. Τώρα στην $\mathcal{D}$ έχουμε τέσσερα αντικείμενα $(F(A), F(B), G(A), G(B))$ και τέσσερα βέλη που τα συνδέουν.

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ \eta_A \downarrow & & \downarrow \eta_B \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B) \end{array}$$

Η οικογένεια η είναι φυσικός μετασχηματισμός όταν το διάγραμμα αυτό αντιμετατίθεται για κάθε μορφισμό f της $\mathcal{C}$, δηλαδή όταν $G(f) \circ \eta_A = \eta_B \circ F(f)$. Αν όλα τα η_A είναι ισομορφισμοί, ο η λέγεται **φυσικός ισομορφισμός**.

Στο παράδειγμά μας οι δύο συναρτητές είναι ο ταυτοτικός συναρτητής $\text{Id} : \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$ και ο συναρτητής $(-)^{**} : \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$ της ενότητας 3.

Θεώρημα 6.1. Η οικογένεια $ev = \{ev_V\}_V$ είναι φυσικός μετασχηματισμός

$$ev : \text{Id}_{\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}} \Rightarrow (-)^{**}.$$

Ο περιορισμός του στην $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}^{\text{fd}}$ είναι φυσικός ισομορφισμός

$$ev : \text{Id}_{\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}^{\text{fd}}} \cong (-)^{**}.$$

Απόδειξη. Για $F = \text{Id}$ και $G = (-)^{**}$ η συνθήκη φυσικότητας γράφεται $f^{**} \circ ev_V = ev_W \circ f$, που είναι η Πρόταση 3.3. Για χώρους πεπερασμένης διάστασης κάθε ev_V είναι ισομορφισμός από το Θεώρημα 4.1. Ο συναρτητής $(-)^{**}$ περιορίζεται στην $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}^{\text{fd}}$ επειδή $\dim V^{**} = \dim V$. $\square$

Το Θεώρημα 6.1 λέει κάτι ισχυρότερο από το ότι κάθε V είναι ισόμορφος με τον V^{**} . Λέει ότι οι ισομορφισμοί ev_V για τους διάφορους χώρους δεν είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους, αλλά ταιριάζουν με όλες τις γραμμικές απεικονίσεις. Αντίθετα, η Πρόταση 5.2 δείχνει ότι ο ισομορφισμός $V \cong V^*$, που υπάρχει για κάθε χώρο πεπερασμένης διάστασης, δεν μπορεί να οργανωθεί με τέτοιο τρόπο.

⁸Βλ. ενότητες 6.4 και 6.6 του βιβλίου μας. Ο διπλός δυϊκός εμφανίζεται εκεί ως παράδειγμα στην ενότητα 6.5, και η σημασία του όρου «φυσικός» συζητείται στην ενότητα 6.9.

7 Η δυϊκότητα ως προσάρτηση

Μια γραμμική απεικόνιση $W \rightarrow V^*$ και μια γραμμική απεικόνιση $V \rightarrow W^*$ είναι δύο αναγνώσεις της ίδιας πληροφορίας. Η αντιστοιχία

$$\text{Hom}_{\mathbb{F}}(W, V^*) \cong \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W^*)$$

που τις συνδέει δεν είναι πρόσθετη δομή που επιβάλλουμε τεχνητά στον δυϊκό, και η Θεωρία Κατηγοριών την οργανώνει ως προσάρτηση.

Ο δυϊκός συναρτητής εμφανίζεται με δύο τρόπους. Ο ένας είναι ο συναρτητής $D : \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$ της ενότητας 2. Ο άλλος είναι ο συναρτητής

$$D^{\text{op}} : \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}^{\text{op}}, \quad V \mapsto V^*, \quad f \mapsto (f^*)^{\text{op}},$$

που στέλνει τη γραμμική απεικόνιση $f : V \rightarrow W$ στον μορφισμό $(f^*)^{\text{op}} : V^* \rightarrow W^*$ της $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}^{\text{op}}$, όπου $f^* : W^* \rightarrow V^*$ είναι η ανάστροφη. Οι δύο συναρτητές σχηματίζουν προσάρτηση.

Θυμίζουμε πρώτα τον ορισμό.⁹ Για μια κατηγορία $\mathcal{C}$ γράφουμε $\mathcal{C}(A, B)$ για το σύνολο των μορφισμών $A \rightarrow B$. Ένας συναρτητής $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ είναι **αριστερός συζυγής** ενός συναρτητή $U : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, και γράφουμε $F \dashv U$, όταν για κάθε αντικείμενο A της $\mathcal{C}$ και κάθε αντικείμενο B της $\mathcal{D}$ δίνεται μια αμφίρριψη

$$\Phi_{A,B} : \mathcal{D}(F(A), B) \rightarrow \mathcal{C}(A, U(B)),$$

φυσική ως προς A και B . Η φυσικότητα σημαίνει ότι για κάθε $h : A' \rightarrow A$ στην $\mathcal{C}$, κάθε $k : B \rightarrow B'$ στην $\mathcal{D}$ και κάθε $g : F(A) \rightarrow B$ ισχύει

$$\Phi_{A',B'}(k \circ g \circ F(h)) = U(k) \circ \Phi_{A,B}(g) \circ h. \quad (2)$$

Στο παράδειγμά μας θέτουμε $\mathcal{C} = \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$, $\mathcal{D} = \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}^{\text{op}}$, $F = D^{\text{op}}$ και $U = D$. Το $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}(V, W)$ είναι λοιπόν το σύνολο $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ των γραμμικών απεικονίσεων $V \rightarrow W$. Ένας μορφισμός $D^{\text{op}}(V) = V^* \rightarrow W^*$ της $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}^{\text{op}}$ είναι της μορφής f^{op} , όπου $f : W \rightarrow V^*$ είναι γραμμική απεικόνιση. Ταυτίζουμε λοιπόν το $\mathcal{D}(D^{\text{op}}(V), W)$ με το $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}(W, V^*)$, και η αμφίρριψη που ζητάμε γράφεται

$$\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}(W, V^*) \cong \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}(V, W^*).$$

Θεώρημα 7.1. Για κάθε ζεύγος διανυσματικών χώρων V, W η απεικόνιση

$$\Phi_{V,W} : \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}(W, V^*) \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}(V, W^*), \quad \Phi_{V,W}(f) = f^* \circ \text{ev}_V,$$

είναι αμφίρριψη, φυσική ως προς V και W .

Η ουσία της προσάρτησης εδώ είναι απλή. Μια γραμμική απεικόνιση $f : W \rightarrow V^*$ μπορεί να διαβαστεί ως διγραμμική απεικόνιση

$$W \times V \rightarrow \mathbb{F}, \quad (w, v) \mapsto f(w)(v),$$

και επομένως, αν αντιστρέψουμε τους δύο ρόλους, ως γραμμική απεικόνιση $V \rightarrow W^*$. Η προσάρτηση εκφράζει κατηγορικά αυτή την αντιστοιχία και την απαίτηση ότι είναι φυσική ως προς V και W .

Ας δούμε τι γίνεται ο τύπος (2) με αυτή την ταύτιση. Ένας μορφισμός $h : V' \rightarrow V$ της $\mathcal{C}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση $a : V' \rightarrow V$, και τότε $F(h) = D^{\text{op}}(a) = (a^*)^{\text{op}}$. Ένας μορφισμός $k : W \rightarrow W'$

⁹Βλ. ενότητα 13.3 του βιβλίου μας, όπου ο ορισμός διατυπώνεται με άλλα γράμματα. Εδώ αλλάζουμε τα γράμματα για να μη συγχέονται με τα σύμβολα του παραδείγματος. Για τα Hom -σύνολα βλ. ενότητα 3.5.

της $\mathcal{D}$ είναι της μορφής b^{op} , όπου $b : W' \rightarrow W$ είναι γραμμική απεικόνιση, και τότε $U(k) = D(b^{\text{op}}) = b^*$. Για $g = f^{\text{op}}$ με $f : W \rightarrow V^*$, ο κανόνας σύνθεσης της αντίθετης κατηγορίας δίνει

$$k \circ g \circ F(h) = b^{\text{op}} \circ f^{\text{op}} \circ a^{\text{op}} (a^*)^{\text{op}} = (a^* \circ f \circ b)^{\text{op}}.$$

Επειδή η σύνθεση στην $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}^{\text{op}}$ γίνεται με αντίστροφη σειρά, η b εμφανίζεται δεξιά και η a^* αριστερά. Ο τύπος (2) γίνεται λοιπόν

$$\Phi_{V',W'}(a^* \circ f \circ b) = b^* \circ \Phi_{V,W}(f) \circ a$$

για κάθε $a : V' \rightarrow V$, $b : W' \rightarrow W$ και $f : W \rightarrow V^*$.

Απόδειξη. Για $f \in \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}(W, V^*)$, $v \in V$ και $w \in W$, από τους ορισμούς της f^* και της ev_V έχουμε

$$\Phi_{V,W}(f)(v)(w) = (f^*(\text{ev}_V(v)))(w) = \text{ev}_V(v)(f(w)) = f(w)(v).$$

Δηλαδή το $\Phi_{V,W}(f)(v) \in W^*$ είναι το συναρτησοειδές $w \mapsto f(w)(v)$. Ομοίως ορίζουμε την απεικόνιση

$$\Psi_{V,W} : \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}(V, W^*) \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}(W, V^*), \quad \Psi_{V,W}(g) = g^* \circ \text{ev}_W,$$

και βρίσκουμε

$$\Psi_{V,W}(g)(w)(v) = g(v)(w).$$

Οι δύο τύποι δείχνουν ότι οι $\Phi_{V,W}$ και $\Psi_{V,W}$ είναι αντίστροφες μεταξύ τους. Πράγματι, για f όπως παραπάνω, $\Psi_{V,W}(\Phi_{V,W}(f))(w)(v) = \Phi_{V,W}(f)(v)(w) = f(w)(v)$, άρα $\Psi_{V,W}(\Phi_{V,W}(f)) = f$. Ομοίως $\Phi_{V,W}(\Psi_{V,W}(g)) = g$.

Φυσικότητα. Έστω $a : V' \rightarrow V$ και $b : W' \rightarrow W$ γραμμικές απεικονίσεις. Για $f \in \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}(W, V^*)$, $v' \in V'$ και $w' \in W'$ έχουμε

$$\Phi_{V',W'}(a^* \circ f \circ b)(v')(w') = (a^*(f(b(w'))))(v') = f(b(w'))(a(v')),$$

ενώ

$$(b^* \circ \Phi_{V,W}(f) \circ a)(v')(w') = \Phi_{V,W}(f)(a(v'))(b(w')) = f(b(w'))(a(v')).$$

Άρα $\Phi_{V',W'}(a^* \circ f \circ b) = b^* \circ \Phi_{V,W}(f) \circ a$. □

Το Θεώρημα 7.1 λέει ότι $D^{\text{op}} \dashv D$, δηλαδή ότι ο D^{op} είναι αριστερός συζυγής του D και ο D δεξιός συζυγής του D^{op} .¹⁰ Η **μονάδα** της προσάρτησης είναι ο φυσικός μετασχηματισμός $\eta : \text{Id}_{\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}} \Rightarrow D \circ D^{\text{op}} = (-)^{**}$ με συνιστώσες

$$\eta_V = \Phi_{V,V^*}(\text{id}_{V^*}) = (\text{id}_{V^*})^* \circ \text{ev}_V = \text{ev}_V.$$

Η **συν-μονάδα** είναι ο φυσικός μετασχηματισμός $\varepsilon : D^{\text{op}} \circ D \Rightarrow \text{Id}_{\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}^{\text{op}}}$ με συνιστώσες

$$\varepsilon_W = \Phi_{W^*,W}^{-1}(\text{id}_{W^*}) = \Psi_{W^*,W}(\text{id}_{W^*}) = (\text{id}_{W^*})^* \circ \text{ev}_W = \text{ev}_W,$$

δηλαδή, μέσω της ταύτισης που κάναμε, τον μορφισμό $(\text{ev}_W)^{\text{op}} : W^{**} \rightarrow W$ της $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}^{\text{op}}$. Έτσι, η ίδια κατασκευή αξιολόγησης εμφανίζεται ως μονάδα της προσάρτησης και, μετά τη μετάβαση στην αντίθετη κατηγορία, ως συν-μονάδα.

Σε πεπερασμένη διάσταση η μονάδα και η συν-μονάδα είναι ισομορφισμοί (Θεώρημα 4.1), και οι D , D^{op} περιορίζονται στις $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}^{\text{fd}}$ και $(\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}^{\text{fd}})^{\text{op}}$. Η προσάρτηση γίνεται τότε ισοδυναμία κατηγοριών

$$\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}^{\text{fd}} \simeq (\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}^{\text{fd}})^{\text{op}}.$$

Αυτή είναι η κατηγορική διατύπωση του γεγονότος ότι η δυϊκότητα είναι αυτοαντίστροφη σε πεπερασμένη διάσταση.¹¹

¹⁰Βλ. ενότητες 13.4 και 13.5 του βιβλίου μας για τη μονάδα και τη συν-μονάδα.

¹¹Βλ. ενότητα 7.3 του βιβλίου μας.

8 Πέρα από τους διανυσματικούς χώρους

Η ιδέα του δυϊκού δεν περιορίζεται στη Γραμμική Άλγεβρα. Για κάθε κατηγορία $\mathcal{C}$ και κάθε αντικείμενο S της $\mathcal{C}$ η κατασκευή $X \mapsto \mathcal{C}(X, S)$, με $f \mapsto (-) \circ f$ στους μορφισμούς, είναι ανταλλοίωτος συναρτητής από την $\mathcal{C}$ στην **Set**, δηλαδή συναρτητής $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$. Ο δυϊκός χώρος είναι η περίπτωση $\mathcal{C} = \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$ και $S = \mathbb{F}$, όπου το σύνολο $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{F})$ έχει επιπλέον δομή διανυσματικού χώρου. Ας δούμε τι δίνει η ίδια κατασκευή στα σύνολα.

Στην κατηγορία **Set** παίρνουμε $S = \{0, 1\}$. Μια συνάρτηση $\chi : X \rightarrow \{0, 1\}$ καθορίζει το υποσύνολο $A = \{x \in X \mid \chi(x) = 1\}$ του X . Αντίστροφα, κάθε υποσύνολο $A \subseteq X$ καθορίζει τη **χαρακτηριστική** του συνάρτηση χ_A , με $\chi_A(x) = 1$ όταν $x \in A$ και $\chi_A(x) = 0$ όταν $x \notin A$. Το σύνολο $\mathbf{Set}(X, \{0, 1\})$ ταυτίζεται έτσι με το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$. Για $X = \{a, b, c\}$ υπάρχουν $2^3 = 8$ συναρτήσεις $X \rightarrow \{0, 1\}$, όσα και τα υποσύνολα του X . Για παράδειγμα, η συνάρτηση με $a \mapsto 1, b \mapsto 0, c \mapsto 1$ αντιστοιχεί στο υποσύνολο $\{a, c\}$.

Για τις απεικονίσεις, μια συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ δίνει την αντιστοιχία $\chi \mapsto \chi \circ f$, από το $\mathbf{Set}(Y, \{0, 1\})$ στο $\mathbf{Set}(X, \{0, 1\})$. Η φορά αντιστρέφεται, όπως στην ανάστροφη απεικόνιση. Για τα υποσύνολα, αν $B \subseteq Y$, έχουμε $(\chi_B \circ f)(x) = 1$ ακριβώς όταν $f(x) \in B$, δηλαδή όταν $x \in f^{-1}(B)$. Άρα $\chi_B \circ f = \chi_{f^{-1}(B)}$, και η αντιστοιχία στέλνει κάθε υποσύνολο B του Y στην αντίστροφη εικόνα του $f^{-1}(B)$. Για παράδειγμα, αν $Y = \{1, 2\}$ και $f(a) = f(b) = 1, f(c) = 2$, τότε το $B = \{1\}$ πηγαίνει στο $f^{-1}(B) = \{a, b\}$.

Ο δυϊκός χώρος και το δυναμοσύνολο είναι λοιπόν δύο περιπτώσεις της ίδιας κατασκευής. Τις συνδέει η ιδέα ότι ένα αντικείμενο μπορεί να μελετηθεί μέσω των μορφισμών του προς ένα σταθερό αντικείμενο. Η ιδέα αυτή οδηγεί στην έννοια του αναπαράστάσιμου συναρτητή και στο λήμμα Yoneda.¹²

9 Γιατί έχει σημασία η φυσικότητα

Στη Γραμμική Άλγεβρα είναι εύκολο να πούμε $V \cong V^{**}$. Η κατηγορική οπτική μάς οδηγεί να εξετάσουμε με ποιον τρόπο είναι ισόμορφοι. Για κάθε V υπάρχει ένας συγκεκριμένος ισομορφισμός, ο en_V , και αυτό που μετρά είναι ότι οι ισομορφισμοί αυτοί συνεργάζονται μεταξύ τους με τρόπο συμβατό με κάθε γραμμική απεικόνιση.

Βασική ιδέα

Δύο αντικείμενα X και Y είναι ισόμορφα όταν υπάρχει ένα ζεύγος αντίστροφων μορφισμών $X \rightleftarrows Y$. Ένας φυσικός ισομορφισμός $F \cong G$ ανάμεσα σε συναρτητές είναι κάτι πιο λεπτό. Είναι μια οικογένεια ισομορφισμών $F(X) \rightarrow G(X)$, για όλα τα X ταυτόχρονα, που είναι συμβατή με όλους τους μορφισμούς. Για τον δυϊκό χώρο ισχύει $V \cong V^{**}$ με αυτή την ισχυρότερη έννοια, ενώ ο ισομορφισμός $V \cong V^*$ δεν ισχύει με αυτήν.

Η διάκριση αυτή δεν είναι θέμα γλώσσας. Η Πρόταση 5.2 την καθιστά μαθηματικό αποτέλεσμα. Το 1945 οι Samuel Eilenberg και Saunders Mac Lane, στην εργασία τους *General Theory of Natural Equivalences*,¹³ ξεκίνησαν από το πρόβλημα του πώς εκφράζεται με μαθηματική ακρίβεια ότι μια κατασκευή είναι φυσική, δηλαδή ότι δεν εξαρτάται από τυχαίες επιλογές.

¹²Βλ. ενότητες 5.5, 12.3 και 12.5 του βιβλίου μας.

¹³S. Eilenberg και S. Mac Lane, *General Theory of Natural Equivalences*, Transactions of the American Mathematical Society **58** (1945), 231–294. Βλ. και ενότητα 6.2 του βιβλίου μας.

10 Σύνοψη

Συγκεντρώνουμε τις βασικές έννοιες στον παρακάτω πίνακα.

Έννοια	Ορισμός	Κατηγορική σημασία
Δυϊκός χώρος	$V^* = \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{F})$	Τιμή του $(-)^*$ στο αντικείμενο V
Ανάστροφη	$f^*(\varphi) = \varphi \circ f$	Δράση του $(-)^*$ στους μορφισμούς, με αντιστροφή της φοράς
Διπλός δυϊκός	$V^{**} = (V^*)^*$	Συναλλοίωτος συναρτητής $(-)^{**}$
Αξιολόγηση	$\text{ev}_V(v)(\varphi) = \varphi(v)$	Φυσικός μετασχηματισμός $\text{Id} \Rightarrow (-)^{**}$
Ισομορφισμός $V \cong V^{**}$	ev_V , για $\dim V < \infty$	Φυσικός ισομορφισμός $\text{Id} \cong (-)^{**}$
Ισομορφισμός $V \cong V^*$	Εξαρτάται από βάση ή από δι-γραμμική μορφή	Δεν υπάρχει φυσικός (Πρόταση 5.2)
Δυϊκότητα	$\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}(W, V^*) \cong \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}(V, W^*)$	Προσάρτηση $D^{\text{op}} \dashv D$, με μονάδα η και συν-μονάδα ε την ev