

Τα συν-όρια

Από το συν-γινόμενο, τον συν-εξισωτή και το pushout στη γενική κατασκευή

Σημειώσεις που συνοδεύουν το βιβλίο «Εισαγωγή στη Θεωρία Κατηγοριών» των εκδόσεων ΔΙΑΥΛΟΣ.

Σεπτέμβριος 2026

Στις σημειώσεις «Τα όρια» είδαμε ότι το γινόμενο, ο εξισωτής και το pullback είναι μία κατασκευή, ο καθολικός κώνος πάνω σε ένα διάγραμμα. Εδώ αντιστρέφουμε τα βέλη. Ο κώνος γίνεται συν-κώνος, το όριο γίνεται συν-όριο, και οι τρεις κατασκευές που ξέρουμε αντικαθίστανται από τις δυϊκές τους, το συν-γινόμενο, τον συν-εξισωτή και το pushout. Στα όρια επιλέγαμε τα στοιχεία που ικανοποιούν εξισώσεις. Στα συν-όρια συγκολλάμε, δηλαδή ταυτίζουμε στοιχεία σύμφωνα με σχέσεις. Θα δούμε ακριβώς πώς γίνεται αυτό στα σύνολα και στις ομάδες, και θα αποδείξουμε ότι η ύπαρξη όλων των μικρών συν-γινόμενων και συν-εξισωτών αρκεί για την ύπαρξη όλων των μικρών συν-ορίων.

Τι προϋποθέτουμε. Χρειαζόμαστε τα όσα παρουσιάζουμε στις σημειώσεις «Τα όρια», και ιδιαίτερα τις έννοιες του διαγράμματος και του κώνου. Χρειαζόμαστε επίσης το συν-γινόμενο και το pushout, όπως τα παρουσιάζουμε στις σημειώσεις «Η καθολική ιδιότητα» και «Το pushout και η ένωση συνόλων». Από τη Θεωρία Συνόλων χρειαζόμαστε τη σχέση ισοδυναμίας και το σύνολο πηλίκου. Στο βιβλίο μας «Εισαγωγή στη Θεωρία Κατηγοριών» τα συν-όρια βρίσκονται στο κεφάλαιο 11, και σε κάθε σημείο παραπέμπουμε στην αντίστοιχη ενότητα.

1 Συν-κώνοι

Ένας κώνος πάνω σε ένα διάγραμμα $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ είναι ένα αντικείμενο N με βέλη που φεύγουν από το N προς κάθε $D(j)$. Αν αντιστρέψουμε τη φορά των βελών, ζητάμε βέλη από κάθε $D(j)$ προς ένα αντικείμενο N . Το N δεν είναι πια αφετηρία βελών προς το διάγραμμα, αλλά δέχεται βέλη από αυτό.¹

Ορισμός 1.1 (Συν-κώνος). Έστω $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ ένα διάγραμμα. Ένας **συν-κώνος** (cocone) με βάση $N \in \mathcal{C}$ κάτω από το D είναι μια οικογένεια μορφισμών

$$\iota_j : D(j) \rightarrow N, \quad j \in \text{ob}(\mathcal{J}),$$

τέτοια ώστε για κάθε βέλος $\alpha : i \rightarrow j$ της $\mathcal{J}$ να ισχύει

$$\iota_j \circ D(\alpha) = \iota_i.$$

Η συνθήκη λέει ότι κάθε τρίγωνο της μορφής

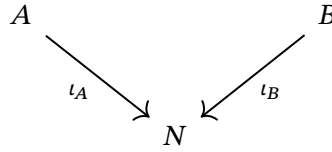
$$\begin{array}{ccc} D(i) & \xrightarrow{D(\alpha)} & D(j) \\ & \searrow \iota_i & \swarrow \iota_j \\ & N & \end{array}$$

αντιμετατίθεται. Είναι ακριβώς η συνθήκη του κώνου με τα βέλη αντεστραμμένα.

Ας δούμε τι σημαίνει ο ορισμός στις τρεις δυϊκές περιπτώσεις.

¹Βλ. ενότητα 11.1 του βιβλίου μας.

Παράδειγμα 1.2 (Συν-κώνοι σε τρία σχήματα). (α') Στο διάγραμμα $\{A, B\}$, δύο αντικείμενα χωρίς βέλη, ένας συν-κώνος με βάση N είναι ένα ζεύγος βελών $\iota_A : A \rightarrow N$ και $\iota_B : B \rightarrow N$. Δεν απαιτείται καμία συνθήκη, ακριβώς όπως στον κώνο για το γινόμενο.



(β') Στο διάγραμμα $f, g : A \rightrightarrows B$ ένας συν-κώνος έχει δύο συνιστώσες $\iota_A : A \rightarrow N$ και $\iota_B : B \rightarrow N$. Η συνθήκη εφαρμόζεται και στα δύο βέλη του σχήματος και δίνει $\iota_B \circ f = \iota_A$ και $\iota_B \circ g = \iota_A$. Άρα $\iota_B \circ f = \iota_B \circ g$, και το ι_A καθορίζεται από το ι_B ως $\iota_A = \iota_B \circ f$. Ένας συν-κώνος είναι επομένως ουσιαστικά ένα βέλος $\iota_B : B \rightarrow N$ με $\iota_B \circ f = \iota_B \circ g$.

(γ') Στο διάγραμμα $A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$, που έχει δύο βέλη με κοινή πηγή, ένας συν-κώνος έχει τρεις συνιστώσες ι_A, ι_B και ι_C με $\iota_A \circ f = \iota_C$ και $\iota_B \circ g = \iota_C$. Άρα $\iota_A \circ f = \iota_B \circ g$, και το ι_C καθορίζεται από αυτή την κοινή τιμή. Ένας συν-κώνος είναι επομένως ουσιαστικά ένα ζεύγος βελών $\iota_A : A \rightarrow N$ και $\iota_B : B \rightarrow N$ που συμφωνούν όταν τα συνθέσουμε με τα f και g .

Διασθητική εικόνα

Ένας συν-κώνος είναι ένα αντικείμενο στο οποίο «χωράει» ολόκληρο το διάγραμμα, με τρόπο συμβατό με τα βέλη του. Αν φανταστούμε τα $D(j)$ ως κομμάτια ενός παζλ, ο συν-κώνος είναι μια επιφάνεια πάνω στην οποία τοποθετούμε όλα τα κομμάτια, έτσι ώστε κομμάτια που συνδέονται με ένα βέλος να καταλήγουν στο ίδιο σημείο.

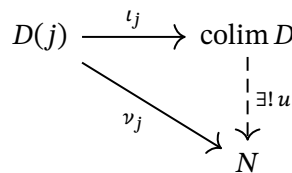
Παρατήρηση 1.3 (Ο συν-κώνος ως φυσικός μετασχηματισμός). Όπως ο κώνος είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός $\Delta_N \Rightarrow D$, ο συν-κώνος με βάση N είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός $\iota : D \Rightarrow \Delta_N$, όπου $\Delta_N : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ είναι ο σταθερός συναρτητής με τιμή N . Το τετράγωνο φυσικότητας για ένα βέλος $\alpha : i \rightarrow j$ δίνει $\Delta_N(\alpha) \circ \iota_i = \iota_j \circ D(\alpha)$, δηλαδή $\iota_i = \iota_j \circ D(\alpha)$.

2 Το συν-όριο

Όπως στα όρια, δεν μας αρκεί ένας οποιοσδήποτε συν-κώνος. Ζητάμε εκείνον από τον οποίο προκύπτει μοναδικά κάθε άλλος, δηλαδή τον καθολικό.

Ορισμός 2.1 (Συν-όριο). Έστω $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ ένα διάγραμμα. Το **συν-όριο** (colimit) του D είναι ένας συν-κώνος ($\text{colim } D, \iota_j : D(j) \rightarrow \text{colim } D$) με την εξής ιδιότητα. Για κάθε συν-κώνο $(N, \nu_j : D(j) \rightarrow N)$ κάτω από το D υπάρχει μοναδικός μορφισμός $u : \text{colim } D \rightarrow N$ ώστε

$$u \circ \iota_j = \nu_j \quad \text{για κάθε } j \in \text{ob}(\mathcal{J}).$$



Η διαφορά με το όριο βρίσκεται μόνο στη φορά των βελών. Στο όριο τα βέλη πηγαίνουν από ένα εξωτερικό αντικείμενο προς το διάγραμμα. Στο συν-όριο πηγαίνουν από το διάγραμμα προς ένα εξωτερικό αντικείμενο.²

²Βλ. ενότητα 11.2 του βιβλίου μας.

Και εδώ οι συν-κάννοι σχηματίζουν κατηγορία. Ένας μορφισμός από τον (N, ν) στον (N', ν') είναι ένας μορφισμός $f : N \rightarrow N'$ με $f \circ \nu_j = \nu'_j$ για κάθε j . Ο ορισμός του συν-ορίου λέει ακριβώς ότι ο καθολικός συν-κάννος είναι ένα αρχικό αντικείμενο αυτής της κατηγορίας, γιατί προς κάθε συν-κάννο υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός από αυτόν.

Πρόταση 2.2 (Μοναδικότητα του συν-ορίου). Αν (L, ι) και (L', ι') είναι δύο συν-όρια του D , τότε υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός $\varphi : L \rightarrow L'$ με $\varphi \circ \iota_j = \iota'_j$ για κάθε j .

Απόδειξη. Αφού ο (L, ι) είναι αρχικός, υπάρχει μοναδικός μορφισμός συν-κάννων $\varphi : (L, \iota) \rightarrow (L', \iota')$. Συμμετρικά υπάρχει μοναδικός $\psi : (L', \iota') \rightarrow (L, \iota)$. Η σύνθεση $\psi \circ \varphi$ είναι μορφισμός συν-κάννων από τον (L, ι) στον εαυτό του, όπως και η id_L . Αφού ο (L, ι) είναι αρχικός, υπάρχει ένας μόνο τέτοιος μορφισμός, άρα $\psi \circ \varphi = \text{id}_L$. Ομοίως $\varphi \circ \psi = \text{id}_{L'}$. $\square$

Το συν-όριο είναι λοιπόν μοναδικό ως προς ισομορφισμό που σέβεται τις συνιστώσες ι_j , και γράφουμε $\text{colim } D$.

Η σχέση με τα όρια έχει ακριβή διατύπωση, και εξηγεί γιατί η απόδειξη ήταν η ίδια με εκείνη για τα όρια. Ένας συν-κάννος κάτω από το $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ είναι ακριβώς ένας κάννος πάνω στο $D^{\text{op}} : \mathcal{J}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$ στην αντίθετη κατηγορία, γιατί η αντιστροφή των βελών μετατρέπει τα $\iota_j : D(j) \rightarrow N$ σε βέλη $N \rightarrow D(j)$.³ Άρα το συν-όριο του D στην $\mathcal{C}$ είναι το όριο του D^{op} στην $\mathcal{C}^{\text{op}}$. Κάθε θεώρημα για όρια δίνει έτσι αυτόματα ένα θεώρημα για συν-όρια, αντιστρέφοντας τα βέλη.

3 Το συν-γινόμενο, ο συν-εξισωτής και το pushout ως συν-όρια

Ας ελέγξουμε ότι ο γενικός ορισμός ξαναβρίσκει τις κατασκευές που γνωρίζουμε, και ότι μας δίνει μία καινούργια.

Συν-γινόμενο. Στο διάγραμμα $\{A, B\}$ ένας συν-κάννος είναι ένα ζεύγος βελών $\nu_A : A \rightarrow N$ και $\nu_B : B \rightarrow N$, χωρίς συνθήκη. Ο καθολικός συν-κάννος είναι ένα αντικείμενο Q με δύο βέλη ι_A και ι_B , ώστε κάθε τέτοιο ζεύγος να προκύπτει μοναδικά από αυτό. Αυτός είναι ο ορισμός του συν-γινόμενου, με τους εγκλεισμούς στη θέση των ι_A και ι_B . Άρα $\text{colim } D = A + B$.⁴

Συν-εξισωτής. Στα σύνολα ο εξισωτής των $f, g : A \rightarrow B$ επιλέγει τα στοιχεία του A όπου οι f και g συμφωνούν. Ο συν-εξισωτής κάνει το αντίστροφο. Ταυτίζει τα $f(a)$ και $g(a)$ για κάθε $a \in A$, και το κάνει στο B , με το μικρότερο δυνατό πηλίκο. Δεν έχουμε ακόμη τον ορισμό του με βέλη, και τον παίρνουμε από την ιδιότητα που περιγράψαμε.

Ορισμός 3.1 (Συν-εξισωτής). Έστω $f, g : A \rightarrow B$ δύο μορφισμοί. Ένας **συν-εξισωτής** (coequalizer) των f και g είναι ένα αντικείμενο Q μαζί με έναν μορφισμό $q : B \rightarrow Q$ τέτοιο ώστε $q \circ f = q \circ g$ και, για κάθε μορφισμό $h : B \rightarrow X$ με $h \circ f = h \circ g$, να υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\bar{h} : Q \rightarrow X$ με $\bar{h} \circ q = h$.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{q} & Q \\ & \xrightarrow{g} & & & \downarrow \exists! \bar{h} \\ & & & \searrow h & X \end{array}$$

³Για την αντίθετη κατηγορία βλ. ενότητα 3.7 του βιβλίου μας.

⁴Βλ. ενότητα 11.3 του βιβλίου μας.

Ο ορισμός είναι ο δυϊκός του εξισωτή.⁵ Ας δούμε ότι είναι συν-όριο. Στο διάγραμμα $f, g : A \rightrightarrows B$ ένας συν-κώνος είναι, όπως είδαμε, ένα βέλος $\nu_B : B \rightarrow N$ με $\nu_B \circ f = \nu_B \circ g$, μαζί με το $\nu_A = \nu_B \circ f$. Ο Q με τα βέλη $q \circ f$ και q είναι συν-κώνος, γιατί $q \circ f = q \circ g$. Είναι και ο καθολικός. Αν (N, ν_A, ν_B) είναι συν-κώνος, τότε $\nu_B \circ f = \nu_B \circ g$, άρα υπάρχει μοναδικός $\bar{\nu} : Q \rightarrow N$ με $\bar{\nu} \circ q = \nu_B$, και τότε $\bar{\nu} \circ (q \circ f) = \nu_B \circ f = \nu_A$. Αντίστροφα, κάθε u' που ικανοποιεί τις δύο ισότητες του ορισμού του συν-ορίου ικανοποιεί και την $u' \circ q = \nu_B$, άρα $u' = \bar{\nu}$. Επομένως το συν-όριο του D είναι ο συν-εξισωτής των f και g .

Pushout. Στο διάγραμμα $A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$ ένας συν-κώνος είναι, όπως είδαμε, ένα ζεύγος βελών $\nu_A : A \rightarrow N$ και $\nu_B : B \rightarrow N$ με $\nu_A \circ f = \nu_B \circ g$, μαζί με το $\nu_C = \nu_A \circ f$. Έστω (P, ι_A, ι_B) το pushout των f και g . Ο P με τα βέλη ι_A, ι_B και $\iota_A \circ f$ είναι συν-κώνος. Για κάθε άλλο συν-κώνο το ζεύγος (ν_A, ν_B) ικανοποιεί $\nu_A \circ f = \nu_B \circ g$, άρα υπάρχει μοναδικός $u : P \rightarrow N$ με $u \circ \iota_A = \nu_A$ και $u \circ \iota_B = \nu_B$, και τότε $u \circ (\iota_A \circ f) = \nu_A \circ f = \nu_C$. Επομένως $\text{colim } D = A \sqcup_C B$.⁶

σχήμα του διαγράμματος	συν-κώνος με βάση N	συν-όριο
δύο αντικείμενα, κανένα βέλος	ζεύγος βελών $A \rightarrow N, B \rightarrow N$	$A + B$
δύο παράλληλα βέλη	βέλος $h : B \rightarrow N$ με $h \circ f = h \circ g$	συν-εξισωτής των f, g
δύο βέλη με κοινή πηγή	ζεύγος $A \rightarrow N, B \rightarrow N$ που συμφωνεί πάνω στο C	$A \sqcup_C B$

Βασική ιδέα

Το συν-όριο είναι η καθολική ιδιότητα με αντεστραμμένα βέλη, εφαρμοσμένη σε ένα τυχαίο διάγραμμα. Αυτό που αλλάζει από κατασκευή σε κατασκευή είναι μόνο το σχήμα του διαγράμματος.

4 Δύο ακραίες περιπτώσεις

Όπως στα όρια, δύο ακραίες κατηγορίες δείκτες μας βοηθούν να καταλάβουμε τον ορισμό.

Το κενό διάγραμμα. Για την κενή κατηγορία $\mathcal{J} = \emptyset$ ένας συν-κώνος είναι απλώς ένα αντικείμενο N , χωρίς συνιστώσες και χωρίς συνθήκη. Το συν-όριο είναι τότε ένα αντικείμενο I με την ιδιότητα ότι για κάθε αντικείμενο N υπάρχει μοναδικός μορφισμός $I \rightarrow N$. Δηλαδή το συν-όριο του κενού διαγράμματος είναι ένα αρχικό αντικείμενο, το κενό συν-γινόμενο.⁷ Στη **Set** είναι το κενό σύνολο και στη **Grp** η τετριμμένη ομάδα.

Διαγράμματα με τελικό αντικείμενο. Στην άλλη άκρη βρίσκονται τα σχήματα που έχουν τελικό αντικείμενο. Το αποτέλεσμα είναι το δυϊκό εκείνου που είδαμε για τα όρια.

Πρόταση 4.1. Έστω ότι η κατηγορία δείκτης $\mathcal{J}$ έχει τελικό αντικείμενο t , και για κάθε j έστω $\alpha_j : j \rightarrow t$ ο μοναδικός μορφισμός. Τότε για κάθε διάγραμμα $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ το συν-όριο είναι το $D(t)$, με συνιστώσες $\iota_j = D(\alpha_j)$.⁸

⁵Βλ. ενότητα 11.5 του βιβλίου μας.

⁶Βλ. ενότητα 11.4 του βιβλίου μας.

⁷Βλ. ενότητα 3.9 του βιβλίου μας.

⁸Βλ. ενότητα 11.6 του βιβλίου μας.

Απόδειξη. Η οικογένεια $\iota_j = D(\alpha_j)$ είναι συν-κώνος με βάση $D(t)$. Για κάθε βέλος $\beta : i \rightarrow j$ οι $\alpha_j \circ \beta$ και α_i είναι μορφισμοί $i \rightarrow t$, άρα συμπίπτουν. Συνεπώς $\iota_j \circ D(\beta) = D(\alpha_j \circ \beta) = D(\alpha_i) = \iota_i$.

Έστω τώρα ένας συν-κώνος (N, ν_j) . Η συνθήκη του συν-κώνου για το α_j δίνει $\nu_i \circ D(\alpha_j) = \nu_j$, δηλαδή $\nu_i \circ \iota_j = \nu_j$ για κάθε j . Άρα το $u = \nu_i$ ικανοποιεί την απαίτηση του ορισμού. Είναι και μοναδικό, γιατί το α_i είναι η id_i , οπότε $\iota_i = \text{id}_{D(i)}$, και κάθε u με $u \circ \iota_i = \nu_i$ ικανοποιεί $u = \nu_i$. $\square$

Για παράδειγμα, στο διάγραμμα $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ το συν-όριο είναι το C , με συνιστώσες $g \circ f$, g και id_C . Σε τέτοια σχήματα η πληροφορία συγκεντρώνεται ήδη στο τελικό αντικείμενο, και ο συν-κώνος δεν έχει κάτι να ταυτίσει.

Προσοχή

Στα σχήματα χωρίς τελικό αντικείμενο εμφανίζονται πολλές από τις χαρακτηριστικές κατασκευές συν-ορίων. Στο σχήμα του pushout δεν υπάρχει βέλος μεταξύ των δύο άκρων, άρα δεν υπάρχει τελικό αντικείμενο, και το συν-όριο $A \sqcup_C B$ δεν είναι γενικά ισόμορφο με κανένα από τα A, B, C .

5 Τα συν-όρια στα σύνολα και στις ομάδες

Στα όρια είδαμε ότι στη **Set** το όριο είναι υποσύνολο ενός γινομένου. Στα συν-όρια ισχύει το δυϊκό. Το συν-όριο είναι *πηλίκο* μιας ξένης ένωσης.

Πρόταση 5.1 (Συν-όρια στα σύνολα). Έστω $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathbf{Set}$ ένα διάγραμμα, και $\approx$ η σχέση ισοδυναμίας στην ξένη ένωση $\coprod_j D(j)$ που παράγεται από τις ταυτίσεις

$$(i, x) \sim (j, D(\alpha)(x)) \quad \text{για κάθε βέλος } \alpha : i \rightarrow j \text{ και κάθε } x \in D(i).$$

Τότε το σύνολο $L = (\coprod_j D(j)) / \approx$, με $\iota_j(x) = [(j, x)]$, είναι το συν-όριο του D .⁹

Απόδειξη. Το (L, ι) είναι συν-κώνος, γιατί $\iota_j(D(\alpha)(x)) = [(j, D(\alpha)(x))] = [(i, x)] = \iota_i(x)$. Έστω συν-κώνος (N, ν_j) . Ορίζουμε μια συνάρτηση h από την ξένη ένωση στο N με $h(j, x) = \nu_j(x)$. Η σχέση « $h(z) = h(w)$ » είναι σχέση ισοδυναμίας, και περιέχει τις ταυτίσεις $(i, x) \sim (j, D(\alpha)(x))$, αφού $\nu_j(D(\alpha)(x)) = \nu_i(x)$ από τη συνθήκη του συν-κώνου. Άρα περιέχει και την παραγόμενη σχέση $\approx$, δηλαδή η h είναι σταθερή σε κάθε κλάση και επάγει συνάρτηση $u : L \rightarrow N$ με $u([(j, x)]) = \nu_j(x)$, οπότε $u \circ \iota_j = \nu_j$. Αν μια συνάρτηση u' ικανοποιεί τις ίδιες ιδιότητες, συμπίπτει με την u σε κάθε κλάση $[(j, x)]$, άρα $u' = u$. $\square$

Στην πράξη ταυτίζουμε στοιχεία μέχρι να μην απομένει καμία ταύτιση που να επιβάλλεται από το διάγραμμα. Αυτό σημαίνει ότι δεν ταυτίζουμε τίποτα περισσότερο από όσα χρειάζεται. Ας το δούμε σε τρία παραδείγματα.

Παράδειγμα 5.2 (Ο συν-εξισωτής στα σύνολα). Έστω $A = \{1, 2\}$, $B = \{x, y, z\}$ και

$$f(1) = x, \quad f(2) = z, \quad g(1) = y, \quad g(2) = z.$$

Η ταύτιση $f(a) \sim g(a)$ δίνει $x \sim y$ από το $a = 1$, και την τετριμμένη $z \sim z$ από το $a = 2$. Οι κλάσεις είναι οι $\{x, y\}$ και $\{z\}$. Ο συν-εξισωτής είναι το σύνολο $B / \sim$ με δύο στοιχεία, και ο $q : B \rightarrow B / \sim$ στέλνει τα x, y στην πρώτη κλάση και το z στη δεύτερη.¹⁰

⁹Βλ. ενότητα 11.6 του βιβλίου μας.

¹⁰Βλ. ενότητα 11.5 του βιβλίου μας.

Παράδειγμα 5.3 (Διάγραμμα με τελικό αντικείμενο). Έστω $\mathcal{J} = \{0 \rightarrow 1\}$ και το διάγραμμα $D(0) = \{1, 2\} \rightarrow D(1) = \{x, y\}$ με $D(\alpha)(1) = D(\alpha)(2) = x$. Στην ξένη ένωση ταυτίζουμε τα $(0, 1)$ και $(0, 2)$ με το $(1, x)$. Οι κλάσεις είναι οι

$$\{(0, 1), (0, 2), (1, x)\} \quad \text{και} \quad \{(1, y)\}.$$

Το συν-όριο έχει δύο στοιχεία και είναι ισόμορφο με το $D(1) = \{x, y\}$. Αυτό δεν είναι σύμπτωση, γιατί το 1 είναι τελικό αντικείμενο της $\mathcal{J}$ και εφαρμόζεται η Πρόταση 4.1.

Παράδειγμα 5.4 (Η ένωση μιας αύξουσας αλυσίδας). Έστω $A_n = \{1, \dots, n\}$ για $n \geq 1$, και το διάγραμμα που έχει για σχήμα την αλυσίδα $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots$ και για βέλη τις εγκλείσεις $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$. Οι ταυτίσεις $(n, x) \sim (n+1, x)$ συνδέουν όλα τα αντίγραφα του ίδιου στοιχείου x , και μόνο αυτά. Οι κλάσεις αντιστοιχούν λοιπόν στα στοιχεία της ένωσης $\bigcup_n A_n$, και το συν-όριο είναι ο $\mathbb{N}$ των θετικών ακεραίων. Το σχήμα αυτό είναι άπειρο και δεν έχει τελικό αντικείμενο, και το συν-όριο δεν ανάγεται στο $D(t)$ για κανένα t .

Προσοχή

Οι εγκλεισμοί ι_j δεν είναι κατ' ανάγκην έρριψεις, γιατί το συν-όριο μπορεί να ταυτίσει στοιχεία που ήταν διαφορετικά. Αν $C = \{1, 2\}$, $A = \{a_1, a_2\}$ και $B = \{b\}$, με $f(i) = a_i$ και $g(1) = g(2) = b$, τότε $a_1 \sim b \sim a_2$, και το pushout είναι ένα μονοσύνολο. Ο ι_A στέλνει τα a_1 και a_2 στο ίδιο στοιχείο, άρα δεν είναι έρριψη.^{α'}

^{α'} Βλ. ενότητα 11.4 του βιβλίου μας.

Στις ομάδες η κατασκευή χρειάζεται προσοχή, γιατί το πηλίκο πρέπει να παραμείνει ομάδα. Ας δούμε τον συν-εξισωτή.

Πρόταση 5.5 (Ο συν-εξισωτής στις ομάδες). Έστω $f, g: G \rightarrow H$ ομομορφισμοί ομάδων, και N η κανονική υποομάδα του H που παράγεται από τα στοιχεία $f(a)g(a)^{-1}$, $a \in G$, δηλαδή η μικρότερη κανονική υποομάδα που τα περιέχει. Ο κανονικός ομομορφισμός $q: H \rightarrow H/N$ είναι ο συν-εξισωτής των f και g .¹¹

Απόδειξη. Για κάθε a έχουμε $f(a)g(a)^{-1} \in N$, άρα $q(f(a)) = q(g(a))$. Έστω ομομορφισμός $h: H \rightarrow X$ με $h \circ f = h \circ g$. Τότε $h(f(a)g(a)^{-1}) = h(f(a))h(g(a))^{-1} = e$, δηλαδή ο πυρήνας του h περιέχει όλα τα $f(a)g(a)^{-1}$. Ο πυρήνας είναι κανονική υποομάδα, άρα περιέχει και την N . Επομένως ο h περνά στο πηλίκο και ορίζει ομομορφισμό $\bar{h}: H/N \rightarrow X$ με $\bar{h} \circ q = h$. Είναι ο μοναδικός, γιατί ο q είναι επί. $\square$

Αν ο g είναι ο τετριμμένος ομομορφισμός, τα στοιχεία $f(a)g(a)^{-1} = f(a)$ παράγουν την κανονική κλειστότητα της εικόνας του f , και ο συν-εξισωτής είναι το $H/\langle\langle \text{Im } f \rangle\rangle$. Όταν η $\text{Im } f$ είναι ήδη κανονική στο H , για παράδειγμα όταν η H είναι αβελιανή, είναι το γνωστό πηλίκο $H/\text{Im } f$.

Το συν-γινόμενο στη **Grp** είναι το ελεύθερο γινόμενο $G * H$, όπως είδαμε στη σημείωση «Η καθολική ιδιότητα». Το pushout δύο ομομορφισμών $f: K \rightarrow G$ και $g: K \rightarrow H$ είναι το αμάλλαμα (amalgamated free product) $G *_K H$, δηλαδή το πηλίκο του $G * H$ ως προς την κανονική κλειστότητα του συνόλου $\{f(k)g(k)^{-1} \mid k \in K\}$.¹²

Παρατήρηση 5.6 (Το θεώρημα Seifert-van Kampen). Το αμάλλαμα εμφανίζεται σε ένα από τα κεντρικά θεωρήματα της Αλγεβρικής Τοπολογίας. Αν ένας χώρος X είναι ένωση δύο ανοιχτών υποσυνόλων U και V , με τα U , V και $U \cap V$ συνεκτικά κατά δρόμους και $x_0 \in U \cap V$, τότε

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) *_\pi \pi_1(V, x_0).$$

¹¹ Βλ. ενότητα 11.5 του βιβλίου μας.

¹² Βλ. ενότητα 11.9 του βιβλίου μας. Η κατασκευή του ελεύθερου γινομένου με ανηγμένες λέξεις δεν αποδεικνύεται εδώ.

Ο υπολογισμός της θεμελιώδους ομάδας ενός χώρου ανάγεται έτσι στον υπολογισμό ενός συν-ορίου στη **Grp**.¹³

6 Κατασκευή από συν-γινόμενα και συν-εξισωτές

Όπως τα πεπερασμένα όρια κατασκευάζονται από γινόμενα και εξισωτές, έτσι και τα συν-όρια κατασκευάζονται από συν-γινόμενα και συν-εξισωτές. Ο ορισμός της συν-πληρότητας είναι ο δυϊκός της πληρότητας.

Ορισμός 6.1 (Συν-πλήρης κατηγορία). Μια κατηγορία $\mathcal{C}$ λέγεται **συν-πλήρης** (cocomplete) αν κάθε διάγραμμα $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ με μικρή $\mathcal{J}$ έχει συν-όριο, και **πεπερασμένα συν-πλήρης** αν το ίδιο ισχύει για κάθε πεπερασμένη $\mathcal{J}$.¹⁴

Θεώρημα 6.2. Μια κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι συν-πλήρης αν και μόνο αν έχει όλα τα μικρά συν-γινόμενα και όλους τους συν-εξισωτές. Ομοίως, είναι πεπερασμένα συν-πλήρης αν και μόνο αν έχει πεπερασμένα συν-γινόμενα και συν-εξισωτές.

Απόδειξη. Τα συν-γινόμενα και οι συν-εξισωτές είναι συν-όρια, του διακριτού διαγράμματος και του διαγράμματος $f, g : A \rightrightarrows B$ αντίστοιχα (Ενότητα 3), άρα η μία κατεύθυνση είναι άμεση.

Αντίστροφα, έστω $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ ένα διάγραμμα με $\mathcal{J}$ μικρή, ή πεπερασμένη στη δεύτερη περίπτωση. Σχηματίζουμε δύο συν-γινόμενα,

$$S = \coprod_{j \in \text{ob}(\mathcal{J})} D(j), \quad T = \coprod_{\alpha : i \rightarrow j} D(i),$$

όπου το δεύτερο έχει έναν παράγοντα $D(i)$ για κάθε μη ταυτοτικό βέλος $\alpha : i \rightarrow j$, με το i να είναι η πηγή του α . Συμβολίζουμε με $\kappa_j : D(j) \rightarrow S$ και $\varepsilon_\alpha : D(i) \rightarrow T$ τους εγκλεισμούς. Ορίζουμε δύο μορφισμούς $s, t : T \rightarrow S$ από τις συνιστώσες τους,

$$s \circ \varepsilon_\alpha = \kappa_i, \quad t \circ \varepsilon_\alpha = \kappa_j \circ D(\alpha).$$

Έστω $q : S \rightarrow Q$ ο συν-εξισωτής των s και t , και $\iota_j = q \circ \kappa_j$. Θα δείξουμε ότι ο (Q, ι) είναι το συν-όριο του D .

Είναι συν-κώνος. Για μη ταυτοτικό $\alpha : i \rightarrow j$ η ισότητα $q \circ s = q \circ t$, συντεθειμένη με το ε_α , δίνει $q \circ \kappa_i = q \circ \kappa_j \circ D(\alpha)$, δηλαδή $\iota_i = \iota_j \circ D(\alpha)$. Για ταυτοτικό βέλος η συνθήκη ισχύει τετριμμένα.

Είναι καθολικός. Έστω συν-κώνος (N, ν_j) . Από την καθολική ιδιότητα του S υπάρχει μοναδικός $h : S \rightarrow N$ με $h \circ \kappa_j = \nu_j$ για κάθε j . Για κάθε μη ταυτοτικό $\alpha : i \rightarrow j$ έχουμε

$$h \circ s \circ \varepsilon_\alpha = h \circ \kappa_i = \nu_i \quad \text{και} \quad h \circ t \circ \varepsilon_\alpha = h \circ \kappa_j \circ D(\alpha) = \nu_j \circ D(\alpha) = \nu_i,$$

άρα, από τη μοναδικότητα στο συν-γινόμενο T , ισχύει $h \circ s = h \circ t$. Από την καθολική ιδιότητα του συν-εξισωτή υπάρχει μοναδικός $u : Q \rightarrow N$ με $u \circ q = h$, και τότε $u \circ \iota_j = h \circ \kappa_j = \nu_j$. Αν ένας u' ικανοποιεί $u' \circ \iota_j = \nu_j$ για κάθε j , τότε $(u' \circ q) \circ \kappa_j = \nu_j$ για κάθε j , άρα $u' \circ q = h$ από τη μοναδικότητα στο S , και επομένως $u' = u$ από τη μοναδικότητα στον συν-εξισωτή. $\square$

Το θεώρημα είναι το δυϊκό εκείνου των ορίων, και η απόδειξη προκύπτει από εκείνη με αντιστροφή των βελών. Εφαρμόζεται αμέσως. Η **Set** είναι συν-πλήρης από την Πρόταση 5.1. Η **Grp** έχει συν-εξισωτές από την Πρόταση 5.5, και έχει συν-γινόμενα αυθαίρετων μικρών οικογενειών, τα ελεύθερα γινόμενα, άρα είναι κι αυτή συν-πλήρης.¹⁵

¹³Βλ. ενότητα 11.9 του βιβλίου μας, όπου δίνεται και η σχετική βιβλιογραφία. Το θεώρημα δεν αποδεικνύεται εδώ.

¹⁴Βλ. ενότητα 11.8 του βιβλίου μας.

¹⁵Βλ. ενότητα 11.9 του βιβλίου μας.

7 Τα όρια και τα συν-όρια

Ο παρακάτω πίνακας συγκεντρώνει τις αντιστοιχίες. Κάθε γραμμή του δεν είναι απλή αναλογία αλλά δυϊσμός. Αν αντιστρέψουμε τα βέλη σε έναν ορισμό ή θεώρημα της αριστερής στήλης, παίρνουμε τον αντίστοιχο ορισμό ή θεώρημα της δεξιάς.

όρια	συν-όρια
κώνος $\lambda_j : N \rightarrow D(j)$	συν-κώνος $\iota_j : D(j) \rightarrow N$
όριο $\lim D$, τελικός κώνος	συν-όριο $\operatorname{colim} D$, αρχικός συν-κώνος
γινόμενο $A \times B$	συν-γινόμενο $A + B$
εξισωτής	συν-εξισωτής
pullback $A \times_C B$	pushout $A \sqcup_C B$
υποσύνολο γινομένου	πηλίκιο ξένης ένωσης
κενό όριο, τελικό αντικείμενο	κενό συν-όριο, αρχικό αντικείμενο
πλήρης κατηγορία	συν-πλήρης κατηγορία

Τα συν-όρια σχετίζονται και με τις προσαρτήσεις. Στη σημείωση «Η προσάρτηση», στην ενότητα «Οι συζυγείς συναρτητές και τα όρια», είδαμε ότι ένας αριστερός συζυγής διατηρεί τα συν-γινόμενα. Ισχύει γενικότερα ότι διατηρεί όλα τα συν-όρια που υπάρχουν, ενώ ένας δεξιός συζυγής διατηρεί τα όρια. Έτσι, για παράδειγμα, η ελεύθερη ομάδα στέλνει την ξένη ένωση στο ελεύθερο γινόμενο, $F(S \sqcup T) \cong F(S) * F(T)$, γιατί η ξένη ένωση είναι συν-γινόμενο στα σύνολα και η ελεύθερη ομάδα είναι αριστερός συζυγής. Στο βιβλίο μας το κεφάλαιο των συζυγών συναρτητών ακολουθεί αυτό των συν-ορίων, και η διατήρηση ορίων και συν-ορίων είναι ένα από τα βασικά του αποτελέσματα.

8 Σύνοψη

- Ένας συν-κώνος κάτω από ένα διάγραμμα D είναι ένα αντικείμενο N με βέλη $\iota_j : D(j) \rightarrow N$ που σέβονται τα βέλη του διαγράμματος, δηλαδή $\iota_j \circ D(\alpha) = \iota_i$.
- Το συν-όριο $\operatorname{colim} D$ είναι ο καθολικός συν-κώνος. Από αυτόν προκύπτει μοναδικά κάθε άλλος. Οι συν-κώνοι σχηματίζουν κατηγορία, και το συν-όριο είναι αρχικό αντικείμενό της, άρα είναι μοναδικό ως προς ισομορφισμό.
- Το συν-όριο στην $\mathcal{C}$ είναι όριο στην $\mathcal{C}^{\text{op}}$, και κάθε θεώρημα για όρια έχει δυϊκό για συν-όρια.
- Το συν-γινόμενο, ο συν-εξισωτής και το pushout είναι τα συν-όρια των τριών απλούστερων σχημάτων. Το συν-όριο του κενού διαγράμματος είναι το αρχικό αντικείμενο.
- Αν η κατηγορία δείκτης έχει τελικό αντικείμενο t , το συν-όριο είναι το $D(t)$. Οι χαρακτηριστικές κατασκευές συν-ορίων εμφανίζονται σε σχήματα χωρίς τελικό αντικείμενο.
- Στη **Set** το συν-όριο είναι το πηλίκιο της ξένης ένωσης $\coprod_j D(j)$ ως προς τη σχέση ισοδυναμίας που παράγεται από τις ταυτίσεις $x \sim D(\alpha)(x)$. Στη **Grp** ο συν-εξισωτής είναι το πηλίκιο H/N ως προς την κανονική κλειστότητα των $f(a)g(a)^{-1}$.
- Μια κατηγορία είναι συν-πλήρης αν και μόνο αν έχει όλα τα μικρά συν-γινόμενα και τους συν-εξισωτές. Το συν-όριο ενός διαγράμματος είναι ο συν-εξισωτής δύο μορφισμών μεταξύ συν-γινομένων.