

Ο αντιμεταθέτης και η αβελιανοποίηση

Πόσο απέχει μια ομάδα από το να είναι αβελιανή

Σημειώσεις που συνοδεύουν το βιβλίο «Εισαγωγή στη Θεωρία Κατηγοριών» των εκδόσεων ΔΙΑΥΛΟΣ.

Σεπτέμβριος 2026

1 Ο αντιμεταθέτης

Σε μια αβελιανή ομάδα ισχύει $ab = ba$ για κάθε ζεύγος στοιχείων. Σε μια τυχαία ομάδα αυτό δεν ισχύει, και το ερώτημα είναι πώς μπορούμε να μετρήσουμε την αποτυχία του. Η ιδέα είναι απλή. Αν τα ab και ba διαφέρουν, ας ζητήσουμε το στοιχείο που τα συνδέει.

Τι προϋποθέτουμε. Από τη θεωρία ομάδων χρειαζόμαστε τις πλευρικές κλάσεις, την ομάδα πηλίκο ως προς μια κανονική υποομάδα, την υποομάδα που παράγεται από ένα σύνολο στοιχείων, τον πυρήνα ενός ομομορφισμού και το πρώτο θεώρημα ισομορφισμού. Στις ενότητες 5 και 6 χρησιμοποιούμε επίσης τις έννοιες της κατηγορίας, του συναρτητή, της φυσικότητας και της προσάρτησης, όπως τις παρουσιάζουμε στο βιβλίο μας «Εισαγωγή στη Θεωρία Κατηγοριών».

Ορισμός 1.1 (Αντιμεταθέτης). Έστω G μια ομάδα και $a, b \in G$. Ο **αντιμεταθέτης** (*commutator*)¹ των a και b είναι το στοιχείο

$$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}.$$

Προσοχή

Ορισμένοι συγγραφείς ορίζουν τον αντιμεταθέτη ως $a^{-1}b^{-1}ab$. Οι δύο ορισμοί δίνουν διαφορετικά στοιχεία, αλλά τις ίδιες γενικές ιδιότητες, και η υποομάδα που θα ορίσουμε στην ενότητα 3 είναι η ίδια και στις δύο περιπτώσεις. Εμείς θα χρησιμοποιούμε παντού τον πρώτο ορισμό.

Ο αντιμεταθέτης μετρά ακριβώς αυτό που ζητήσαμε.

Πρόταση 1.2. Για κάθε $a, b \in G$ ισχύει $ab = [a, b]ba$. Ειδικότερα, $[a, b] = e$ αν και μόνο αν $ab = ba$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$[a, b]ba = aba^{-1}b^{-1}ba = aba^{-1}a = ab.$$

Αν $[a, b] = e$, τότε η ισότητα δίνει $ab = ba$. Αντίστροφα, αν $ab = ba$, τότε $[a, b] = aba^{-1}b^{-1} = baa^{-1}b^{-1} = e$. $\square$

Άρα ο αντιμεταθέτης είναι ο «διορθωτικός παράγοντας» που πολλαπλασιάζουμε από αριστερά στο ba για να πάρουμε το ab .

2 Στοιχειώδεις ιδιότητες

Πρόταση 2.1. Για κάθε $a, b, c, g \in G$ ισχύουν τα εξής.

¹Στο βιβλίο μας «Εισαγωγή στη Θεωρία Κατηγοριών» ο όρος αυτός αποδίδεται ως «μεταθέτης». Εδώ χρησιμοποιούμε τον όρο «αντιμεταθέτης» που δίνουν τα μαθηματικά λεξικά.

- (i) $[a, b]^{-1} = [b, a]$.
(ii) $g[a, b]g^{-1} = [gag^{-1}, gbg^{-1}]$.
(iii) $[a, bc] = [a, b] \cdot b[a, c]b^{-1}$.

Απόδειξη. (i) Αντιστρέφοντας ένα γινόμενο αντιστρέφουμε τους παράγοντες με την αντίστροφη σειρά, άρα

$$[a, b]^{-1} = (aba^{-1}b^{-1})^{-1} = bab^{-1}a^{-1} = [b, a].$$

(ii) Εισάγουμε το $g^{-1}g$ ανάμεσα στους παράγοντες,

$$gaba^{-1}b^{-1}g^{-1} = (gag^{-1})(gbg^{-1})(ga^{-1}g^{-1})(gb^{-1}g^{-1}),$$

και αυτό είναι το $[gag^{-1}, gbg^{-1}]$, αφού $ga^{-1}g^{-1} = (gag^{-1})^{-1}$ και ομοίως για το b .

(iii) Έχουμε

$$[a, b] \cdot b[a, c]b^{-1} = aba^{-1}b^{-1} \cdot baca^{-1}c^{-1}b^{-1} = abca^{-1}c^{-1}b^{-1} = [a, bc]. \quad \square$$

Η (ii) λέει ότι ένας συζυγής ενός αντιμεταθέτη είναι πάλι αντιμεταθέτης, και η (i) ότι ο αντίστροφος ενός αντιμεταθέτη είναι πάλι αντιμεταθέτης. Θα τα χρειαστούμε αμέσως.

3 Η υποομάδα των αντιμεταθετών

Το σύνολο των αντιμεταθετών δεν είναι εν γένει υποομάδα, γιατί το γινόμενο δύο αντιμεταθετών μπορεί να μην είναι αντιμεταθέτης.² Παίρνουμε λοιπόν την υποομάδα που παράγουν.

Ορισμός 3.1 (Υποομάδα των αντιμεταθετών). Η **υποομάδα των αντιμεταθετών** (ή **παράγωγη υποομάδα**) της G είναι η υποομάδα

$$[G, G] = \langle [a, b] \mid a, b \in G \rangle$$

που παράγεται από όλους τους αντιμεταθέτες της G .

Κάθε στοιχείο της υποομάδας που παράγεται από ένα σύνολο S είναι πεπερασμένο γινόμενο στοιχείων του S και αντιστρόφων τους. Επειδή ο αντίστροφος ενός αντιμεταθέτη είναι αντιμεταθέτης, κάθε στοιχείο της $[G, G]$ είναι πεπερασμένο γινόμενο αντιμεταθετών.

Θυμίζουμε ότι μια υποομάδα H της G λέγεται **κανονική** αν $aH = Ha$ για κάθε $a \in G$.

Πρόταση 3.2. $H[G, G]$ είναι κανονική υποομάδα της G .

Απόδειξη. Θέτουμε $H = [G, G]$ και έστω $a \in G$. Θα δείξουμε ότι $aH = Ha$.

Έστω $h \in H$. Τότε $h = c_1c_2 \cdots c_k$ με κάθε c_i αντιμεταθέτη. Έχουμε

$$aha^{-1} = (ac_1a^{-1})(ac_2a^{-1}) \cdots (ac_ka^{-1}).$$

Από την Πρόταση 2.1(ii) κάθε ac_ia^{-1} είναι αντιμεταθέτης, άρα $aha^{-1} \in H$. Επομένως υπάρχει $h' \in H$ με $aha^{-1} = h'$, δηλαδή $ah = h'a \in Ha$. Άρα $aH \subseteq Ha$.

Εφαρμόζουμε το ίδιο επιχείρημα για το a^{-1} στη θέση του a . Για κάθε $h \in H$ υπάρχει $h'' \in H$ με $a^{-1}ha = h''$, δηλαδή $ha = ah'' \in aH$. Άρα $Ha \subseteq aH$.

Συνεπώς $aH = Ha$ για κάθε $a \in G$, και η H είναι κανονική. $\square$

²Σε μικρές ομάδες δεν θα βρούμε τέτοιο παράδειγμα. Οι μικρότερες ομάδες στις οποίες το σύνολο των αντιμεταθετών δεν είναι υποομάδα έχουν τάξη 96.

Μπορούμε επομένως να σχηματίσουμε την ομάδα πηλίκο $G/[G, G]$.

Πρόταση 3.3. Η ομάδα $G/[G, G]$ είναι αβελιανή.

Απόδειξη. Έστω $a, b \in G$. Είναι

$$(a[G, G])(b[G, G]) = ab[G, G].$$

Θέτουμε $x = (ba)^{-1}ab$, οπότε $ab = ba \cdot x$. Υπολογίζουμε $x = a^{-1}b^{-1}ab = [a^{-1}, b^{-1}]$, άρα το x είναι αντιμεταθέτης και ανήκει στην $[G, G]$. Επομένως $x[G, G] = [G, G]$ και

$$ab[G, G] = ba x[G, G] = ba[G, G],$$

δηλαδή $(a[G, G])(b[G, G]) = (b[G, G])(a[G, G])$. □

Το επόμενο αποτέλεσμα λέει ότι η $[G, G]$ είναι η καλύτερη δυνατή επιλογή.

Θεώρημα 3.4. Έστω $N \trianglelefteq G$.³ Η ομάδα G/N είναι αβελιανή αν και μόνο αν $[G, G] \subseteq N$. Ειδικότερα, η $[G, G]$ είναι η μικρότερη κανονική υποομάδα της G με αβελιανό πηλίκο.

Απόδειξη. Θυμίζουμε πρώτα δύο απλά γεγονότα, που θα τα χρησιμοποιήσουμε συνέχεια.

Το πρώτο είναι ότι για $x, y \in G$ ισχύει $xN = yN$ αν και μόνο αν $y^{-1}x \in N$. Πράγματι, αν $xN = yN$, τότε $x = ye \in yN$, άρα $x = yn$ για κάποιο $n \in N$, και συνεπώς $y^{-1}x = n \in N$. Αντίστροφα, αν $y^{-1}x = n \in N$, τότε $x = yn$ και άρα $xN = ynN = yN$.

Το δεύτερο είναι ότι, αφού η N είναι κανονική, το γινόμενο στην G/N ορίζεται από την ισότητα $(aN)(bN) = abN$. Επομένως η G/N είναι αβελιανή αν και μόνο αν $abN = baN$ για κάθε $a, b \in G$. Από το πρώτο γεγονός αυτό ισχύει αν και μόνο αν

$$(ba)^{-1}ab \in N \quad \text{για κάθε } a, b \in G. \quad (*)$$

Τώρα υπολογίζουμε

$$(ba)^{-1}ab = a^{-1}b^{-1}ab = [a^{-1}, b^{-1}],$$

αφού $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ και εδώ $x = a^{-1}$, $y = b^{-1}$. Άρα η συνθήκη (*) γράφεται

$$[a^{-1}, b^{-1}] \in N \quad \text{για κάθε } a, b \in G. \quad (**)$$

Έστω τώρα ότι η G/N είναι αβελιανή, οπότε ισχύει η (**). Θέλουμε να δείξουμε ότι $[G, G] \subseteq N$. Έστω $[c, d]$ ένας τυχόν αντιμεταθέτης της G . Επιλέγουμε $a = c^{-1}$ και $b = d^{-1}$. Τότε $a^{-1} = c$ και $b^{-1} = d$, άρα από την (**) έχουμε $[c, d] = [a^{-1}, b^{-1}] \in N$. Επομένως κάθε αντιμεταθέτης της G ανήκει στην N . Η $[G, G]$ είναι η μικρότερη υποομάδα που περιέχει όλους τους αντιμεταθέτες, και η N είναι μια υποομάδα που τους περιέχει. Άρα $[G, G] \subseteq N$.

Αντίστροφα, έστω ότι $[G, G] \subseteq N$. Για $a, b \in G$ το στοιχείο $[a^{-1}, b^{-1}]$ είναι αντιμεταθέτης, άρα ανήκει στην $[G, G]$ και συνεπώς στην N . Ισχύει λοιπόν η (**), δηλαδή η G/N είναι αβελιανή.

Μένει να δείξουμε το «ειδικότερα». Από την Πρόταση 3.2 η $[G, G]$ είναι κανονική υποομάδα της G , και από την Πρόταση 3.3 η $G/[G, G]$ είναι αβελιανή. Άρα η $[G, G]$ είναι κανονική υποομάδα με αβελιανό πηλίκο. Αν τώρα η N είναι οποιαδήποτε κανονική υποομάδα της G με αβελιανό πηλίκο, τότε από το πρώτο μέρος έχουμε $[G, G] \subseteq N$. Άρα η $[G, G]$ περιέχεται σε κάθε τέτοια υποομάδα, και είναι η μικρότερη από αυτές. □

³Με το σύμβολο $N \trianglelefteq G$ δηλώνουμε ότι η N είναι κανονική υποομάδα της G .

4 Παραδείγματα

Παράδειγμα 4.1 (Αβελιανές ομάδες). Αν η G είναι αβελιανή, τότε $[a, b] = e$ για κάθε a, b , άρα $[G, G] = \{e\}$. Και αντίστροφα, αν $[G, G] = \{e\}$, τότε από την Πρόταση 1.2 η G είναι αβελιανή.

Παράδειγμα 4.2 ($H S_3$). Συνθέτουμε τις μεταθέσεις από δεξιά προς τα αριστερά. Οι (12) και (13) είναι αντίστροφες του εαυτού τους, γιατί $(12)^{-1} = (21) = (12)$ και ομοίως $(13)^{-1} = (31) = (13)$, άρα

$$[(12), (13)] = (12)(13)(12)(13) = (123).$$

Επομένως η $[S_3, S_3]$ περιέχει το (123). Αφού είναι υποομάδα, περιέχει και το $(123)^2 = (132)$, άρα ολόκληρη την $A_3 = \{e, (123), (132)\}$. Από την άλλη, η A_3 είναι κανονική υποομάδα της S_3 , ως πυρήνας του ομομορφισμού προσήμου $S_3 \rightarrow \{1, -1\}$. Η S_3/A_3 έχει τάξη 2, και κάθε ομάδα τάξης 2 είναι αβελιανή, αφού έχει μόνο το ουδέτερο και ένα ακόμη στοιχείο. Το Θεώρημα 3.4 δίνει λοιπόν $[S_3, S_3] \subseteq A_3$. Συμπεραίνουμε ότι $[S_3, S_3] = A_3$ και $S_3/A_3 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Παράδειγμα 4.3 ($H S_n$). Το ίδιο ισχύει για κάθε $n \geq 2$, δηλαδή $[S_n, S_n] = A_n$. Η συμπερίληψη $[S_n, S_n] \subseteq A_n$ προκύπτει όπως παραπάνω, γιατί η A_n είναι κανονική, ως πυρήνας του προσήμου $S_n \rightarrow \{1, -1\}$, και η S_n/A_n έχει τάξη 2. Για την αντίστροφη συμπερίληψη, για $n \geq 3$ ο υπολογισμός του Παραδείγματος 4.2, με τα a, b, c στη θέση των 1, 2, 3, δείχνει ότι κάθε 3-κύκλος $(a b c)$ είναι αντιμεταθέτης, δηλαδή $[(a b), (a c)] = (a b c)$. Είναι γνωστό ότι η A_n παράγεται από τους 3-κύκλους, άρα $A_n \subseteq [S_n, S_n]$.

Παράδειγμα 4.4 ($H A_n$ για $n \geq 5$). Για $n \geq 5$ ισχύει $[A_n, A_n] = A_n$, δηλαδή το πηλίκο $A_n/[A_n, A_n]$ είναι τετριμμένο. Ο λόγος είναι ότι για $n \geq 5$ η A_n είναι **απλή**, δηλαδή οι μόνες κανονικές υποομάδες της είναι η $\{e\}$ και η ίδια η A_n . Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό και δεν θα το αποδείξουμε εδώ. Από την Πρόταση 3.2 η $[A_n, A_n]$ είναι κανονική υποομάδα της A_n , άρα είναι η $\{e\}$ ή η A_n . Δεν μπορεί να είναι η $\{e\}$, γιατί τότε η A_n θα ήταν αβελιανή, ενώ $(123)(345) = (12345)$ και $(345)(123) = (12453)$. Άρα $[A_n, A_n] = A_n$.

Η συνθήκη $n \geq 5$ είναι ουσιώδης. Η A_3 είναι αβελιανή, άρα $[A_3, A_3] = \{e\}$. Για την A_4 , η υποομάδα των αντιμεταθετών είναι η υποομάδα τάξης 4 με στοιχεία την ταυτότητα και τα γινόμενα $(12)(34)$, $(13)(24)$, $(14)(23)$, και το πηλίκο έχει τάξη 3. Έτσι για την S_n , με $n \geq 2$, το πηλίκο $S_n/[S_n, S_n]$ έχει τάξη 2, ενώ για την A_n με $n \geq 5$ το πηλίκο είναι τετριμμένο.

Παράδειγμα 4.5 ($H GL_n(\mathbb{R})$). Έστω $SL_n(\mathbb{R})$ η ομάδα των μητρώων με ορίζουσα 1. Η ορίζουσα $\det : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^\times$ είναι ομομορφισμός, και ο πυρήνας της είναι ακριβώς η $SL_n(\mathbb{R})$. Ειδικότερα η $SL_n(\mathbb{R})$ είναι κανονική υποομάδα της $GL_n(\mathbb{R})$. Για $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ έχουμε

$$\det[A, B] = \det A \det B (\det A)^{-1} (\det B)^{-1} = 1,$$

γιατί η $\mathbb{R}^\times$ είναι αβελιανή. Άρα κάθε αντιμεταθέτης της $GL_n(\mathbb{R})$ ανήκει στην $SL_n(\mathbb{R})$, και αφού η $SL_n(\mathbb{R})$ είναι υποομάδα, περιέχει και την υποομάδα που παράγουν. Έτσι

$$[GL_n(\mathbb{R}), GL_n(\mathbb{R})] \subseteq SL_n(\mathbb{R}).$$

Στο ίδιο συμπέρασμα φτάνουμε και με το Θεώρημα 3.4. Η ορίζουσα είναι επιρριπτική, αφού η διαγώνια μήτρα με λ στη θέση $(1, 1)$ και 1 στις υπόλοιπες διαγώνιες θέσεις έχει ορίζουσα λ . Από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμού $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^\times$, που είναι αβελιανή.

Παράδειγμα 4.6 (Ένα παράδειγμα με αριθμούς). Ας πάρουμε τις απεικονίσεις $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ της μορφής $x \mapsto \varepsilon x + b$, με $\varepsilon \in \{1, -1\}$ και $b \in \mathbb{Z}$. Με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων αποτελούν ομάδα G , και το αντίστροφο της $x \mapsto \varepsilon x + b$ είναι η $x \mapsto \varepsilon x - \varepsilon b$. Η ομάδα αυτή λέγεται **άπειρη διεδρική ομάδα** και συμβολίζεται D_∞ . Συμβολίζουμε με t_b τη μεταφορά $x \mapsto x + b$ και με s την ανάκλαση $x \mapsto -x$. Οι s και t_b δεν αντιμετατίθενται όταν $b \neq 0$, γιατί $(s \circ t_b)(x) = -x - b$ ενώ $(t_b \circ s)(x) = -x + b$.

Ας υπολογίσουμε τον αντιμεταθέτη τους. Αφού $s^{-1} = s$ και $t_b^{-1} = t_{-b}$, έχουμε $[s, t_b] = s t_b s t_{-b}$, και συνθέτοντας από δεξιά προς τα αριστερά παίρνουμε

$$x \mapsto x - b \mapsto b - x \mapsto 2b - x \mapsto x - 2b.$$

Άρα $[s, t_b] = t_{-2b}$. Η Πρόταση 1.2 λέει ότι $s t_b = t_{-2b} t_b s$, και πράγματι τα δύο μέλη στέλνουν το x στο $-x - b$. Ο αντιμεταθέτης είναι λοιπόν ακριβώς η μεταφορά κατά $-2b$, δηλαδή κατά έναν άρτιο αριθμό.

Ας δούμε τι μας λέει αυτό για την $[G, G]$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\rho : G \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \{1, -1\}, \quad \rho(x \mapsto \varepsilon x + b) = ([b]_2, \varepsilon),$$

όπου $[b]_2$ είναι η κλάση του b στο $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Το γινόμενο $(x \mapsto \varepsilon x + b) \circ (x \mapsto \varepsilon' x + b')$ είναι η $x \mapsto \varepsilon \varepsilon' x + (\varepsilon b' + b)$, και $[\varepsilon b' + b]_2 = [b]_2 + [b']_2$, αφού $\varepsilon = \pm 1$ δεν αλλάζει την ισοτιμία. Άρα η ρ είναι ομομορφισμός, και είναι επιρριπτική. Ο πυρήνας της αποτελείται από τις μεταφορές t_b με b άρτιο. Επειδή ο στόχος της είναι αβελιανός, το Θεώρημα 3.4 (ή απευθείας ο υπολογισμός $\rho([u, v]) = [\rho(u), \rho(v)] = e$ για $u, v \in G$) δίνει $[G, G] \subseteq \ker \rho$. Αντίστροφα, κάθε μεταφορά κατά άρτιο αριθμό $2k$ είναι αντιμεταθέτης, αφού $t_{2k} = [s, t_{-k}]$. Άρα $\ker \rho \subseteq [G, G]$, και συμπεραίνουμε ότι

$$[G, G] = \ker \rho = \{t_{2k} \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Αφού η ρ είναι επιρριπτική, το πρώτο θεώρημα ισομορφισμού δίνει

$$G/[G, G] \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \{1, -1\}.$$

Και οι δύο παράγοντες είναι ομάδες τάξης 2, οπότε το πηλίκο είναι η ομάδα του Klein, με τέσσερα στοιχεία.

Το πηλίκο $G/[G, G]$ κρατά μόνο την ισοτιμία του b και το πρόσημο ε . Κάθε άλλη πληροφορία για το b χάνεται, γιατί οι μεταφορές κατά άρτιο αριθμό είναι αντιμεταθέτες.

5 Η αβελιανοποίηση ως συναρτητής

Ορισμός 5.1 (Αβελιανοποίηση). Η **αβελιανοποίηση** (abelianization) της G είναι η αβελιανή ομάδα

$$G^{\text{ab}} = G/[G, G].$$

Με $\pi_G : G \rightarrow G^{\text{ab}}$, $g \mapsto g[G, G]$, συμβολίζουμε τη φυσική προβολή. Είναι ομομορφισμός, γιατί $\pi_G(gh) = gh[G, G] = (g[G, G])(h[G, G]) = \pi_G(g)\pi_G(h)$, και είναι επιρριπτική, αφού κάθε στοιχείο του πηλίκου έχει τη μορφή $g[G, G]$. Ο πυρήνας της είναι η $[G, G]$, γιατί $g[G, G] = [G, G]$ αν και μόνο αν $g \in [G, G]$.

Θέλουμε να δούμε ότι η κατασκευή $G \mapsto G^{\text{ab}}$ επεκτείνεται σε συναρτητή $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ab}$. Χρειαζόμαστε τα επόμενα δύο λήμματα. Το πρώτο λέει ότι ένας ομομορφισμός στέλνει αντιμεταθέτες σε αντιμεταθέτες.

Λήμμα 5.2. Για κάθε ομομορφισμό $\varphi : G \rightarrow H$ ισχύει $\varphi([G, G]) \subseteq [H, H]$.

Απόδειξη. Ένας ομομορφισμός διατηρεί αντιμεταθέτες, γιατί $\varphi([a, b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$. Άρα η εικόνα κάθε γεννήτορα της $[G, G]$ ανήκει στην $[H, H]$, και επειδή η εικόνα μιας παραγόμενης υποομάδας παράγεται από τις εικόνες των γεννητόρων, η $\varphi([G, G])$ περιέχεται στην $[H, H]$. $\square$

Το δεύτερο λέει ότι κάθε ομομορφισμός που στέλνει τους αντιμεταθέτες στο ουδέτερο περνά μέσα από την αβελιανοποίηση, με μοναδικό τρόπο.

Λήμμα 5.3 (Καθολική ιδιότητα της αβελιανοποίησης). Έστω $f : G \rightarrow B$ ομομορφισμός με $[G, G] \subseteq \ker f$. Τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\bar{f} : G^{\text{ab}} \rightarrow B$ με $\bar{f} \circ \pi_G = f$.

Απόδειξη. Ξεκινάμε από τη μοναδικότητα. Έστω $h : G^{\text{ab}} \rightarrow B$ ομομορφισμός με $h \circ \pi_G = f$. Για κάθε $g \in G$ έχουμε $h(g[G, G]) = h(\pi_G(g)) = f(g)$. Αφού κάθε στοιχείο της G^{ab} έχει τη μορφή $g[G, G]$, ο h καθορίζεται πλήρως από τον f . Άρα υπάρχει το πολύ ένας τέτοιος ομομορφισμός.

Για την ύπαρξη ορίζουμε $\bar{f}(g[G, G]) = f(g)$. Πρέπει να ελέγξουμε ότι ο ορισμός δεν εξαρτάται από την επιλογή του αντιπροσώπου g . Αν $g_1[G, G] = g_2[G, G]$, τότε $g_1^{-1}g_2 \in [G, G]$, όπως είδαμε στην αρχή της απόδειξης του Θεωρήματος 3.4. Αφού $[G, G] \subseteq \ker f$, έχουμε $f(g_1)^{-1}f(g_2) = f(g_1^{-1}g_2) = e$, δηλαδή $f(g_1) = f(g_2)$. Ο $\bar{f}$ είναι ομομορφισμός, αφού

$$\bar{f}(g_1[G, G] \cdot g_2[G, G]) = \bar{f}(g_1g_2[G, G]) = f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2) = \bar{f}(g_1[G, G])\bar{f}(g_2[G, G]).$$

Τέλος, $\bar{f}(\pi_G(g)) = \bar{f}(g[G, G]) = f(g)$ για κάθε $g \in G$, δηλαδή $\bar{f} \circ \pi_G = f$. $\square$

Έστω τώρα ομομορφισμός $\varphi : G \rightarrow H$. Ο ομομορφισμός $\pi_H \circ \varphi : G \rightarrow H^{\text{ab}}$ στέλνει την $[G, G]$ στο ουδέτερο, γιατί από το Λήμμα 5.2 έχουμε $\varphi([G, G]) \subseteq [H, H]$, και η π_H στέλνει την $[H, H]$ στο ουδέτερο. Το Λήμμα 5.3 δίνει έναν μοναδικό ομομορφισμό

$$\varphi^{\text{ab}} : G^{\text{ab}} \rightarrow H^{\text{ab}}$$

με

$$\varphi^{\text{ab}} \circ \pi_G = \pi_H \circ \varphi. \quad (1)$$

Αυτό σημαίνει ότι το τετράγωνο

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ \pi_G \downarrow & & \downarrow \pi_H \\ G^{\text{ab}} & \xrightarrow{\varphi^{\text{ab}}} & H^{\text{ab}} \end{array}$$

είναι αντιμεταθετικό. Η μοναδικότητα μας δίνει και τις ιδιότητες του συναρτητή. Για την ταυτοτική id_G ο $\text{id}_{G^{\text{ab}}}$ ικανοποιεί την (1), άρα $(\text{id}_G)^{\text{ab}} = \text{id}_{G^{\text{ab}}}$. Για $\psi : H \rightarrow K$, και οι δύο ομομορφισμοί $(\psi \circ \varphi)^{\text{ab}}$ και $\psi^{\text{ab}} \circ \varphi^{\text{ab}}$ ικανοποιούν την ισότητα $x \circ \pi_G = \pi_K \circ \psi \circ \varphi$, αφού

$$\psi^{\text{ab}} \circ \varphi^{\text{ab}} \circ \pi_G = \psi^{\text{ab}} \circ \pi_H \circ \varphi = \pi_K \circ \psi \circ \varphi.$$

Από τη μοναδικότητα είναι ίσοι. Άρα έχουμε συναρτητή

$$(-)^{\text{ab}} : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ab}.$$

6 Η αβελιανοποίηση ως αριστερή προσάρτηση

Έστω $\iota : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Grp}$ ο συναρτητής εγκλεισμού, που βλέπει κάθε αβελιανή ομάδα ως ομάδα. Το ερώτημα είναι πώς σχετίζονται οι ομομορφισμοί από την G^{ab} προς μια αβελιανή ομάδα A με τους ομομορφισμούς από την G προς την A .

Γράφουμε $\mathbf{Ab}(A_1, A_2)$ για το σύνολο των ομομορφισμών από την αβελιανή ομάδα A_1 στην αβελιανή ομάδα A_2 , και $\mathbf{Grp}(G_1, G_2)$ για το σύνολο των ομομορφισμών από την ομάδα G_1 στην ομάδα G_2 .

Θεώρημα 6.1. Για κάθε ομάδα G και κάθε αβελιανή ομάδα A η απεικόνιση

$$\Phi_{G,A} : \mathbf{Ab}(G^{\text{ab}}, A) \rightarrow \mathbf{Grp}(G, A), \quad h \mapsto h \circ \pi_G,$$

είναι αμφιμονοσήμαντη και φυσική στα G και A .

Η φυσικότητα σημαίνει ότι η Φ συμβιβάζεται με τη σύνθεση. Αν αλλάξουμε την G μέσω ενός ομομορφισμού $\varphi : G' \rightarrow G$, ή την A μέσω ενός ομομορφισμού $\psi : A \rightarrow A'$, δεν έχει σημασία αν εφαρμόσουμε πρώτα την αλλαγή και μετά την Φ ή αντίστροφα. Αυτό ακριβώς εκφράζουν οι δύο ισότητες στο τέλος της απόδειξης.

Απόδειξη. Η $\Phi_{G,A}$ είναι ένα προς ένα (μοναδικότητα). Αν $h \circ \pi_G = h' \circ \pi_G$, τότε $h = h'$, γιατί η π_G είναι επιριπτική.

Η $\Phi_{G,A}$ είναι επί (ύπαρξη). Έστω $f : G \rightarrow A$ ομομορφισμός. Επειδή η A είναι αβελιανή, $f([a, b]) = [f(a), f(b)] = e$ για κάθε a, b , άρα $[G, G] \subseteq \ker f$. Από το Λήμμα 5.3 υπάρχει $\bar{f} : G^{\text{ab}} \rightarrow A$ με $\bar{f} \circ \pi_G = f$, δηλαδή $\Phi_{G,A}(\bar{f}) = f$.

Φυσικότητα στο G . Έστω $\varphi : G' \rightarrow G$. Για $h : G^{\text{ab}} \rightarrow A$ από την (1) έχουμε

$$\Phi_{G',A}(h \circ \varphi^{\text{ab}}) = h \circ \varphi^{\text{ab}} \circ \pi_{G'} = h \circ \pi_G \circ \varphi = \Phi_{G,A}(h) \circ \varphi.$$

Φυσικότητα στο A . Έστω $\psi : A \rightarrow A'$. Τότε $\Phi_{G,A'}(\psi \circ h) = \psi \circ h \circ \pi_G = \psi \circ \Phi_{G,A}(h)$. $\square$

Το ότι η $\Phi_{G,A}$ είναι επί λέει ότι κάθε $f : G \rightarrow A$ παραγοντοποιείται μέσω της π_G , και το ότι είναι ένα προς ένα λέει ότι η παραγοντοποίηση είναι μοναδική. Δηλαδή το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi_G} & G^{\text{ab}} \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\ & & A \end{array}$$

έχει ακριβώς ένα διαγώνιο βέλος $\bar{f}$ που το κάνει αντιμεταθετικό. Άρα ο $(-)^{\text{ab}}$ είναι **αριστερός συζυγής** του ι , ή ισοδύναμα υπάρχει προσάρτηση $(-)^{\text{ab}} \dashv \iota$.

Η μονάδα και η συν-μονάδα της προσάρτησης προκύπτουν από τη $\Phi_{G,A}$. Η μονάδα $\eta_G = \Phi_{G,G^{\text{ab}}}(\text{id})$ είναι η φυσική προβολή $\pi_G : G \rightarrow G^{\text{ab}}$. Η συν-μονάδα $\varepsilon_A : (\iota A)^{\text{ab}} \rightarrow A$ είναι ο μοναδικός ομομορφισμός με $\varepsilon_A \circ \pi_{\iota A} = \text{id}_A$. Αφού η A είναι αβελιανή έχουμε $[A, A] = \{e\}$, και η $\pi_{\iota A}$ είναι ισομορφισμός, οπότε και η ε_A είναι ισομορφισμός.

Σύνοψη

Τι κατορθώσαμε λοιπόν. Για μια ομάδα G , η υποομάδα $[G, G]$ συγκεντρώνει την αποτυχία της αντιμεταθετικότητας. Το πηλίκο

$$G^{\text{ab}} = G/[G, G]$$

είναι η αβελιανή ομάδα που προκύπτει αν καταστήσουμε τετριμμένους όλους τους αντιμεταθέτες. Η προβολή $\pi_G : G \rightarrow G^{\text{ab}}$ έχει την καθολική ιδιότητα ότι κάθε ομομορφισμός f από την G προς μια αβελιανή ομάδα επάγει έναν μοναδικό ομομορφισμό $\bar{f} : G^{\text{ab}} \rightarrow A$. Αυτό ακριβώς σημαίνει ότι ο συναρτητής $(-)^{\text{ab}} : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ab}$ είναι αριστερός συζυγής του συναρτητή εγκλεισμού $\iota : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Grp}$, δηλαδή

$$(-)^{\text{ab}} \dashv \iota.$$